

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

CENTRO UNIVERSITARIO DE MÉRIDA

Ingeniería Técnica en Topografía



APUNUES



TTI AÎMENTAMORE III





UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA CENTRO UNIVERSITARIO DE MÉRIDA

Titulación: Ingeniero Técnico en Topografía



APUNTES DE

FOTOGRAMETRÍA III

Juan Antonio Pérez Álvarez Mérida, Septiembre de 2001

ÍNDICE

ÁREA TEMÁTICA 1. PLANIFICACIÓN DE UN PROYECTO FOTOGRAMÉTRICO

5
. 5
6
7
8
9
10
10
11
12
13
15
16
19
19
19
21
22
22
23
24
25
25
26
26
26

ÁREA TEMÁTICA 2. AEROTRIANGULACIÓN

TEMA 2. INTRODUCCIÓN A LA AEROTRIANGULACIÓN	29
2.1. Introducción	29
2.2. Fases de que consta el proceso de aerotriangulación	31
2.2.1. Fase de preparación	31
2.2.1.1. Recepción del material	31
2.2.1.2. Elección, numeración y señalización de los puntos de control menores	32
2.2.1.3. Preparación del mapa índice de modelos o canevás general	36
2.2.2. Fase de captura instrumental de datos	37
2.2.3. Fase de procesamiento de datos	37
2.3. Clasificación de los métodos de triangulación aérea	40
2.4. Principio de la aerotriangulación	41
2.5. Fuentes de error en la triangulación aérea	44
2.6. Aplicaciones de la triangulación aérea	44
Bibliografía	
	10
TEMA 3. AEROTRIANGULACION POR PASADAS	4 /
3.1. Introducción	47
3.2. Correcciones a efectuar a las coordenadas	49
3.3. Orientación relativa	52
3.4. Formación analítica de la pasada	54
3.4.1. Conexión de modelos por medio de una transformación tridimensional	55
3.4.2. Conexión de modelos a partir de los datos proporcionados en la fase de orientación relativa	55
3.4.2.1. Matriz de rotación para el modelo $n = R_n$	56
3.4.2.2. Factor de escala λ_n para el modelo n	58
3.4.2.3. Desplazamientos Tx_n . Tv_n . Tz_n para el modelo n	60
3.5. Ajuste de la pasada al sistema terreno <i>(orientación absoluta)</i>	
3.6. Compensación de pasadas	63
3.7. Formación y ajustes de bloques a partir de pasadas	
3.7.1 Ajuste altimétrico	65
3.7.2. Ajuste planimétrico	68
Bibliografía	70
,	/ 0
TEMA 4. AEROTRIANGULACION POR MODELOS INDEPENDIENTES	71
4.1. Introducción	71
4.2. Principio teórico del método	72
4.3. Determinación de las coordenadas de los centros de proyección	74
4.4. Formación y ajuste de bloques a partir de modelos	78
4.4.1. Ajuste planimétrico	79
4.4.2. Ajuste altimétrico	92
4.4.3. Ajuste espacial	95
4.4.4. Ajuste separado pero simultáneo de planimetría y altimetría	100
Bibliografía	104
TEMA 5. AEROTRIANGULACIÓN POR HACES	105
5.1. Introducción	105
5.2. Relaciones matemáticas entre coordenadas imagen y terreno	107
5.3. Linealización de las ecuaciones	110
5.4. Ecuaciones de observación y ecuaciones normales	111

5.5. Aproximaciones iniciales para el ajuste por haces	115
5.6. Precisión, ventajas y desventajas del ajuste por haces	116
5.7. Compensación por haces con parámetros adicionales	117
Bibliografia	120
TEMA 6. PRECISIÓN Y DISTRIBUCCIÓN DEL APOYO EN AEROTRIANGULACIÓN	123
6.1. Introducción	123
6.2. Precisión de la aerotriangulación	123
6.2.1. Precisión planimétrica y altimétrica en el ajuste de bloques por modelos	
independientes	124
6.2.1.1. Planimetría	125
6.2.1.2. Altimetría	130
6.2.2. Precisión planimétrica y altimétrica en el ajuste de bloques por haces	133
6.2.2.1. Planimetría	133
6.2.2.2. Altimetría	133
6.2.3. Conclusiones	133
6.2.4. Detección automática de errores groseros	135
6.3. Densidad y distribución de los puntos de apoyo	135
6.3.1. Planimetría	135
6.3.2. Altimetría	136
6.3.3. Configuración más idónea de los puntos de apoyo en el ajuste de bloques	137
Bibliografía	139
TEMA 7. INTEGRACIÓN DE TÉCNICAS GPS EN AEROTRIANGULACIÓN	140
7.1. Introducción	140
7.2. Sistema de coordenadas	141
7.3. Sistema GPS	143
7.4. El GPS en vuelos fotogramétricos	147
7.5. Determinación de la posición de la cámara	148
7.5.1. Problemas específicos	151
7.6. Diseño del bloque y puntos de control necesarios	153
7.7. Ajuste combinado de observaciones	154
7.8. Precisiones de bloques ajustados con GPS	155
7.9. Aerocontrol	158
Bibliografía	159
ÁREA TEMÁTICA 3. MODELOS DIGITALES DEL TERRENO	
TEMA 8. MODELOS DIGITALES DEL TERRENO	161
8.1. Introducción	161
8.2. Definición de MDT	162
8.3. Estructura de datos de los MDEs	163
8.3.1 Estructura vectorial	164

8.3.1. Estructura vectorial	
8.3.2. Estructura raster	
8.4. Métodos para la adquisición de MDEs	
8.4.1. Levantamientos topográficos	
8.4.2. Digitalización de curvas de nivel	
8.4.3. Altímetros radar y láser	
8.4.4. Fotogrametría	
8.5. Geometría epipolar	
8.6. Generación automática de modelos digitales del terreno	

8.7. Métodos de interpolación	173
8.8. Factores que influyen en la exactitud de los MDEs	174
8.9. Aplicaciones de los modelos digitales	175
Bibliografia	176

ÁREA TEMÁTICA 4. LA RECTIFICACIÓN Y LA ORTOFOGRAMETRÍA

TEMA 9. LA RECTIFICACIÓN DE FOTOGRAMAS	
9.1. Introducción	
9.2. Fundamento de la rectificación	
9.3. Desplazamiento debido al relieve	
9.4. Métodos de rectificación	
9.5. De la rectificación a la ortofotogrametría	
Bibliografía	
TEMA 10. ORTOFOGRAMETRÍA DIGITAL	
10.1. Introducción	
10.2. Rectificación de imágenes digitales	
10.3. Métodos de rectificación de imágenes digitales	
10.3.1. Rectificación polinómica	
10.3.2. Rectificación proyectiva	
10.3.3. Rectificación diferencial	
10.4. Esquema de la generación de ortoimágenes mediante el método diferencial	
10.5. Técnicas de remuestreo	190
10.6. Calidad de la imagen ortofotográfica	191
10.7. Correcciones radiométricas	
10.8. Confección de mosaicos	
10.9. Estereo-ortofotogrametría digital	193
10.10. Propiedades de las ortofotos digitales	
Bibliografía	

ÁREA TEMÁTICA 5. LA FOTOGRAMETRÍA POR SATÉLITE

TEMA 11. FOTOGRAMETRÍA POR SATÉLITE	
11.1. Introducción	
11.2. Clasificación	
11.3. Distorsiones geométricas de la imagen	
11.4. Diferencias entre las ecuaciones de aerotriangulación aérea y espacial	
11.5. Ecuaciones de la transformación proyectiva	
11.6. Modelos digitales desde imágenes SPOT	
11.7. Rectificación de imágenes satélites	
11.8. Modelos matemáticos para la rectificación de la imagen	
Bibliografía	

APÉNDICE A	
APÉNDICE B	

TEMA 1

PLANIFICACIÓN DE UN PROYECTO FOTOGRAMÉTRICO

1.1. Introducción. Fases de un proyecto fotogramétrico

1.2. Planificación del vuelo

- 1.2.1. Propósito de la fotografía
- 1.2.2. Elección de la escala de la fotografía
- 1.2.3. Altura de vuelo. Nivel de referencia
- 1.2.4. Disposición de las fotografías
 - 1.2.4.1. Recubrimiento longitudinal
 - 1.2.4.2. Recubrimiento lateral (Bloques de bandas paralelas)
- 1.2.5. La deriva
- 1.2.6. Planificación de un vuelo en terreno montañoso
- 1.2.7. Mapa de vuelo
- **1.2.8. Parámetros de un vuelo vertical**
- 1.2.9. Métodos de navegación fotográfica
 - 1.2.9.1. Navegación a simple vista con cartografía disponible
 - 1.2.9.2. Navegación a simple vista sin cartografía previa
- 1.2.9.3. Sistemas de navegación avanzados
- 1.2.10. Condiciones para la toma de fotografías aéreas
- 1.2.11. Resultados directos de la toma fotográfica
- 1.2.12. Especificaciones técnicas
- **1.3. Control terrestre (Puntos de apoyos)**
 - 1.3.1. Número y distribución
 - 1.3.2. Elección de los P.A. fotogramétricos
- 1.3.3. Preseñalización de los P.A.
- 1.4. Estimación de los costos
- 1.5. **Anexo**
- Bibliografía

1.1. Introducción. Fases de un proyecto fotogramétrico

La ejecución de un proyecto fotogramétrico, requiere antes de comenzar los trabajos un planeamiento cuidadoso. Este planeamiento consiste en proporcionar la cobertura fotográfica de la zona a levantar, cumpliendo con unas especificaciones suministradas por el cliente y reflejadas en el pliego de condiciones. De su buena ejecución dependerá la comodidad, rapidez y precisión del resto de los trabajos.

Al realizar la planificación, hay que tener en cuenta todos los factores que inciden en el vuelo para evitar atrasos, errores y cambios de planes en los momentos críticos del vuelo.

Un proyecto fotogramétrico podemos dividirlo en tres fases:

- 1. *Planificación del vuelo* que debe seguirse para tomar todas las fotografías aéreas que se usarán en el proyecto.
- 2. *Planificación del control terrestre*, así como la ejecución de todos los trabajos topográficos que satisfagan la precisión requerida por el proyecto.
- 3. Estimación de los costos que conlleva el proyecto.

A partir de un proyecto fotogramétrico dado podemos obtener diversos productos, incluyendo los contactos de las fotografías aéreas, fotomapas, mosaicos, mapas topográficos (planimetría y altimetría), perfiles transversales, modelos digitales del terreno, mapas catastrales...etc.

1.2. Planificación del vuelo

Es la fase principal, ya que el éxito final de cualquier proyecto fotogramétrico depende más de las fotografías de buena calidad que de otros aspectos.

Se llama *proyecto de vuelo* al conjunto de cálculos previos a la realización de un vuelo fotogramétrico, mediante los cuales se organiza las operaciones para conseguir el fin propuesto con las condiciones que se han establecido.

La misión del vuelo fotogramétrico tiene por objeto:

Sobrevolar la zona a una altitud que debe calcularse en función de la escala deseada y de la distancia principal de la cámara.

Cubrir con sus imágenes una determinada zona y para ello es preciso que cada fotograma tenga una zona común con las contiguas "zona de recubrimiento".

Para que puedan cumplirse estos objetivos, el avión deberá volar a una altitud constante, siguiendo una ruta predeterminada y a una velocidad constante, para poder realizar sus disparos con intervalos regulares, que se corresponden a recorridos iguales.

En la planificación de un vuelo existen una serie de decisiones previas tales como la escala del mapa, formato de los fotogramas, proyección del mapa, elipsoide de referencia.....etc., que han de tenerse en cuenta a la hora de organizar el planeamiento, ya que afectan a las condiciones del vuelo. Existen otras condiciones que se refieren a la calidad de la fotografía tanto en su aspecto geométrico, como en el fotográfico.

Aspectos geométricos de la fotografía aérea:

- Certificado de calibración de la cámara: nos dará los parámetros de orientación interna (distancia principal, punto principal, coordenadas de las marcas fiduciales, distorsiones).
- Escala de la fotografía.
- Recubrimientos longitudinales y laterales.
- Seguridad de un recubrimiento total en toda la zona.
- Arrastre de la imagen sobre la fotografía.
- Horas útiles de tomas fotográficas.

En cuanto a las condiciones fotográficas, podemos citar:

- Contraste fotográfico de la película.
- La calidad de la imagen.
- La homogeneidad de tonalidad.
- La ausencia de nubes.
- Longitud e intensidad de las sombras.

Algunos de estos aspectos serán tratados en este tema, otros han sido visto en el curso anterior.

La buena ejecución de un planeamiento de vuelo puede estudiarse desde diversos puntos de vistas:

Desde un punto de vista técnico:

- El modelo estereoscópico presentará lo más uniforme posible una escala y unos recubrimientos, y este será de superficie máxima.
- La fotografía aérea será tan vertical como sea posible y deberá existir una buena información para poder enderezar los desplazamientos angulares.
- La fotografía cumplirá las condiciones propias de aplicación métrica.

Desde el punto de vista económico:

La superficie que ha sido cubierta con el menor número de fotogramas para la escala elegida, tendrá un menor número de modelos, con lo cual disminuirá el número de trabajos, aumentando de esta forma el rendimiento.

Con lo visto hasta, ahora podemos decir que el planeamiento de vuelo debe ser planificado cuidadosamente y ejecutado fielmente de acuerdo con un plan de vuelo, que consta de dos apartados:

- 1. Un mapa de vuelo que muestra donde deben ser tomadas las fotografías.
- 2. Especificaciones que trazan como deben tomarse, incluyendo requisitos concretos tales como cámara, película, escala, altura de vuelo, recubrimientos, inclinaciones permitidas...etc.

1.2.1. Propósito de la fotografía

En el planeamiento de vuelo hay que considerar cual va a ser la utilización de la fotografía. Una vez que tengamos definido esto, puede seleccionarse cual será el equipo óptimo a utilizar, así como los procedimientos.

De los diferentes usos que pueden hacerse de las fotografías aéreas, se deseará para la obtención de planos por fotogrametría aérea, unas buenas condiciones métricas de las fotografías, ya que se van a efectuar sobre ellas precisas mediciones. Estas se obtienen usando cámaras calibradas, película con granulometría fina, tiempos de exposición cortos y emulsiones de alta resolución.

Para la obtención de mapas topográficos es aconsejable tomar las fotografías con cámaras granangulares o supergranangulares, para obtener una amplia relación base altura (B/H).

Sean las siguientes figuras con igual base entre tomas:



En la (*Fig.1-a*) la distancia principal (c_1) y la altura de vuelo (H_1) son la mitad que las de la figura 1-b ($c_2=2c_1$, $H_2=2H_1$). Las escalas fotográficas son iguales, pero la relación B/H es doble en la (*Fig.1-a*), así como los ángulos paralácticos ($\Phi_I = \Phi_2$).

Puede demostrarse que los errores en calcular la posición y elevación de puntos en un modelo estereoscópico, aumentan con vuelos de gran altura. Por lo tanto una condición favorable para la obtención de buenas precisiones en la determinación de puntos por fotogrametría es realizar vuelos bajos y ángulos paralácticos grandes, es decir empleo de cámaras granangulares o supergranangulares.

$$dZ = \frac{H}{B} m_b dp_a \implies dZ_1 = 2 dZ_2$$

1.2.2. Elección de la escala de la fotografía

La elección de la escala de la fotografía es función de la escala de representación (escala del plano a representar) y del tamaño de los objetos que se pretenden detectar; es el primer problema que hay que resolver.

La relación entre la escala de la imagen (Mb=1/mb) y la del plano (Mk=1/mk) que se trata de obtener por medios fotogramétricos, viene dada según el ábaco de la (Fig.2), relación que se justifica en el tema de teoría de errores.



Figura 2. Relación entre escala imagen y plano.

Por otro lado la escala de la fotografía nos limitará la detección del tamaño de los objetos. Vamos a admitir para la definición de un punto correspondiente a un detalle natural del terreno, con ayuda de aparatos provistos de elementos de ampliación de imagen, los siguientes valores:

- ml = 0.02 mm (Para un punto cualquiera en condiciones normales de observación).
- ml = 0.01 mm (Detalle natural muy nítido o punto de apoyo señalado artificialmente en el terreno).

Así por ejemplo, para las siguientes escalas podemos detectar el tamaño mínimo de los objetos:

1:mb	1:5000	1:10000	1:20000	1:30000
Pto natural cualquiera	0.10 m	0.20 m	0.40 m	0.60m
Pto de Apoyo	0.05 m	0.10 m	0.20 m	0.30 m

1.2.3. Altura de vuelo. nivel de referencia

Una vez determinada cual será la escala de la imagen, y conocida la distancia principal de la cámara de la toma, podemos obtener la altura de vuelo sobre el terreno:

$$Mb = \frac{1}{mb} = \frac{c}{H} \Longrightarrow H = c mb$$

Anteriormente ya se dijo que existían tantos valores de la escala como puntos con distinta altitud, de manera que H será la altura de vuelo media sobre el terreno.

La altura de vuelo sobre el nivel medio del mar H_0 (dato del altímetro) vendrá dada por la altitud del nivel de referencia en función del relieve del terreno (*Fig.3*).



Figura 3. Toma fotográfica aérea.

$$Ho = H + Ht \Longrightarrow Mb = \frac{1}{Mb} = \frac{c}{Ho - Ht}$$

Los mayores problemas en la planificación de un vuelo se nos van a presentar cuando el terreno es montañoso. Veremos estos casos más adelante.

1.2.4. Disposición de las fotografías. recubrimientos

El objeto de los recubrimientos fotográficos es el de poder aplicar el principio de la visión estereoscópica a los fotogramas aéreos. La parte común entre dos fotografías consecutivas es el modelo estereoscópico, debiendo poderse enlazar estos modelos tanto longitudinalmente como transversalmente.

1.2.4.1. Recubrimiento longitudinal

Supongamos la siguiente situación ideal:

Eje principal estrictamente vertical, terreno llano y horizontal. Si un avión volando en línea recta y a una altitud constante, toma una serie de fotografías a intervalos iguales, estas fotos se alinean formando una banda o pasada fotográfica. (*Fig.4-a y Fig 4-b*)





Figura 4-a. Toma fotográfica de un modelo.

Figura 4-b. Superficie cubierta por una fotografía.

$$S_1 = mb s_1$$
 $S_2 = mb s_2$

Siendo *B* la distancia recorrida entre dos exposiciones sucesivas (base), dos fotos sucesivas tendrán una parte común si $B \le S_I$, pero para que todo punto de la zona cubierta aparezca dos veces es necesario que $B \le S_I/2$.

Mapa de vuelo ideal (Fig. 5) con recubrimiento longitudinal del p%.



Figura 5. Ejecución de vuelo fotogramétrico ideal.

Situación real:

La forma y dimensiones de la superficie del terreno cubierta por las fotos son función de:

- La inclinación del eje vertical; si el eje de la cámara está inclinado, la superficie cubierta será trapezoidal (*Fig. 6-a*).
- Variaciones en la altura de vuelo (Fig. 6-b).
- El relieve del terreno; la superficie se deforma de modo regular (Fig. 6-c).



Estas variaciones de forma no deben causar defectos de recubrimiento estereoscópico, escogiéndose para *B* un valor menor de S_1 /2, es decir un recubrimiento superior al 50%, pero sin aumentar este margen, ya que en caso de exceso aumentaríamos el número de pares, disminuyendo el rendimiento y por tanto la relación (*B*/*H*) de la que depende la precisión.

Llamando p% al recubrimiento longitudinal expresado en tantos por ciento, se fija normalmente este en el 60%, con una tolerancia de ±5%.

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}_{1} (1-p) = \mathbf{s}_{1} \operatorname{mb} (1-p) = \mathbf{s}_{1} \operatorname{mb} \left(1 - \frac{p\%}{100}\right)$$

1.2.4.2. Recubrimiento lateral (Bloques de bandas paralelas)

Para cubrir un territorio extenso es preciso hacer varias bandas dispuestas lateralmente respecto a la primera. Deben ser paralelas y recubrirse de modo que no exista ningún hueco en la cobertura (*Fig 7-a*).

El recubrimiento lateral (q%) deberá ser mínimo para disminuir en lo posible el número de clichés, siendo A la distancia entre dos ejes de vuelo adyacentes, es preciso en terreno llano que $A < S_2$.



Figura 7-a. Recubrimiento transversal entre pasadas adyacentes.

Los defectos de recubrimiento lateral pueden ser resultado de:

- La Inclinación del eje transversal.
- •El relieve del terreno.
- •Errores en el mantenimiento de la altitud.
- •Error en la apreciación de la magnitud A.
- Error en la corrección de la deriva.
- •Errores en el mantenimiento de una ruta constante.

Suele escogerse un recubrimiento transversal de valores comprendidos entre el 10% y el 20 %.

A = S₂ (1 - q) = s₂ mb (1 - q) = s₂ mb
$$\left(1 - \frac{q\%}{100}\right)$$

1.2.5. La deriva

En la ejecución del vuelo fotogramétrico, como consecuencia del empuje del viento sobre el avión, tendríamos unos resultados no deseados; tales como huecos en el recubrimiento entre pasadas, disminución del recubrimiento transversal, mal seguimiento de los ejes de vuelo.....etc.

Por ello, a la hora de realizarse el vuelo, habrá que tener en cuenta este desplazamiento producido por el viento y corregirlo por medio de la deriva.

Llamemos "azimut verdadero" al eje de simetría del avión (Av). En ausencia de viento el eje de vuelo coincide con (Av).

Si existiese viento, la masa de aire en la que se desplaza el avión se mueve respecto al suelo, estando sometido el avión a dos fuerzas (*Fig.* 7):

V_p = Fuerza de los motores del avión, la cual imprime una velocidad y dirección.
→

• V_v = Fuerza del viento.

La trayectoria del avión sería la resultante de las dos fuerzas (Vs), velocidad con respecto del suelo. El ángulo entre la ruta verdadera y el acimut verdadero es la deriva (d).

Si los lados del formato de la película son paralelos y perpendiculares al avión, el recubrimiento que

se obtenga habrá disminuido la superficie útil a utilizar (Fig.8).



Figura 7. Efecto de la fuerza del viento (deriva) sobre la trayectoria verdadera.



Figura 8. Efecto de la deriva en una pasada.

Para ello es preciso girar la cámara a bordo para que un lado del formato sea paralelo a la ruta verdadera, de manera que hay que determinar constantemente el ángulo de deriva (d) y girar la cámara un ángulo (-d).

1.2.6. Planificación del vuelo en terreno montañoso

Anteriormente hemos dicho que los mayores problemas a la hora de la planificación de un vuelo, se nos presentan cuando el terreno es montañoso. En estos casos el nivel de referencia *(Ht)* deberá escogerse, de modo que no produzca huecos en los recubrimientos entre fotografías en los puntos altos del terreno, caso de la figura 10, donde *PB* no quedará reflejado en la segunda fotografía.



Figura 10. Defectos producidos en el recubrimiento longitudinal.

FOTOGRAMETRÍA III

En estos casos se fijan unos límites de variación del desnivel, a partir de las tolerancias fijadas para la variación de la escala (tolerancia que vendrá expresada en el Pliego de Condiciones).



Figura 11. Determinación de los desniveles admisibles.

En terreno montañoso habrá que tener también en cuenta a la hora de la planificación, las variaciones entre el espaciado de la línea de vuelo, que se van a producir en la toma de un bloque de bandas.

Si calculamos la distancia entre ejes de vuelo (A), tal y como se realiza en terreno llano, estaríamos disminuyendo el recubrimiento lateral en las pasadas que se realizan sobre zonas de terreno más elevadas (*Fig.12*).



Figura 12. Vuelo con disminución del recubrimiento transversal.

Sobre la cartografía existente, se estudian las diversas altitudes del terreno de la zona objeto de estudio, procediendo a calcular el espaciado entre las líneas de vuelo, requeridas para proporcionar el adecuado recubrimiento lateral, pudiendo variar este según la tolerancia fijada en el Pliego (*Fig. 13-a*).

Si el terreno cambia de una manera gradual, se podría aumentar la altitud del vuelo de una forma progresiva, de modo que mantendríamos la escala global tan constante como fuera posible. En este caso estamos variando la altura de referencia, a medida que varía la altura del terreno (*Fig.13-b*).



Figura 13-a. Planificación del vuelo con variaciones en el espaciado entre líneas de vuelo.



Figura 13-b. Planificación del vuelo con variaciones en la altura de vuelo entre pasadas.

1.2.7. Mapa de vuelo

El mapa de vuelo proporciona los límites del Proyecto, los ejes de vuelo muestran al piloto por donde debe volar para obtener el recubrimiento deseado. El mapa de vuelo se prepara sobre algún mapa ya existente de la zona, marcando sobre esta cartografía, la zona objeto del Proyecto. Calculada la dimensión del territorio correspondiente a cada foto a la escala del mapa, se indican sobre éste los correspondientes ejes de vuelos de cada pasada, cuidando de mantener el recubrimiento lateral previsto. Sobre los ejes de vuelo y a intervalos regulares a que correspondan el recubrimiento propuesto, se marcan los puntos sobre cuya vertical, deberá realizarse la exposición de la película.

Considerando un vuelo ideal, el punto central de cada fotografía coincidirá con los puntos propuestos, estando todos éstos sobre la misma recta en cada pasada, siendo las pasadas rigurosamente paralelas.

Si la zona donde vamos a trabajar es regular, los ejes de vuelos suelen estar orientados *Norte-Sur* o *Este-Oeste*, numerando las pasadas según este criterio, así como las fotografías de cada pasada (*Fig* 14).



Figura 14. Ejes de vuelo con orientación W-E y E-W.

Si la zona del proyecto es una característica particular del terreno, es decir, tiene forma irregular, o si es larga, estrecha y girada de las direcciones cardinales (cauces de ríos, trazados de nuevas carreteras, líneas costeras,....etc.) no resultará económico volar en las direcciones *Norte-Sur* o *Este-Oeste* (obtendríamos muchas pasadas con pocos fotogramas útiles), es evidente que habría que volar las mayores longitudes de línea (paralelamente a los límites de la zona) (*Fig.15*).



Figura 15. Planificación de un vuelo fotogramétrico sobre una zona de terreno lineal.

1.2.8. Los parámetros de un vuelo vertical

Partamos de un caso ideal (*Fig.16*), donde el avión a una altura *H*, recorrerá el terreno a levantar disparando el obturador de la cámara a intervalos regulares de tiempo, de manera que cada dos fotogramas dispongan del recubrimiento adecuado y se distribuyan sus pasadas sobre el terreno en trayectorias paralelas, barriendo la zona por pasadas que dispongan a su vez de suficiente recubrimiento lateral, para poder solapar unas con otras.

donde:

s = Lado del negativo	P = Pto principal en O1
Fa = Superficie del terreno a cubrir	P' = Pto principal en O2
c = constante de la cámara	b = Fotobase
Vg = Velocidad del avión	



Figura .16. Disposición ideal de fotogramas.

Recubrimiento longitudinal:

$$p = \overline{P'A} + \overline{P'B} = \overline{P'A} + \overline{PB} - \overline{PP'} = \frac{s}{2} + \frac{s}{2} - b = s - b$$
$$p\% = \frac{(s - b)100}{s}$$

The Recubrimiento transversal:

$$q\% = \frac{(s-a)100}{s}$$

siendo "a" la distancia entre los puntos principales de dos pasadas consecutivas.

🖙 Escala de la imagen:

$$Mb = \frac{1}{mb} = \frac{c}{H} = \frac{s}{S}$$

Superficie cubierta por una foto:

$$Fg = S^2 = (s mb)^2$$

The Longitud de la base con recubrimiento longitudinal del p%:

$$b = s \left(1 - \frac{p\%}{100} \right) \quad \text{(fotobase)}$$
$$B = b \text{ mb} = S \left(1 - \frac{p\%}{100} \right) \text{(base)}$$

Thtervalo entre pasadas:

$$a = s \left(1 - \frac{q\%}{100} \right)$$
$$A = S \left(1 - \frac{q\%}{100} \right)$$

Múmero de fotos por pasada:

$$np = \frac{Lp}{B} + 1$$

Múmero de pasadas:

$$nq = \frac{Lq - S}{A} + 1$$

Superficie estereoscópica por par:

$$Fm = (S - B)S$$

Superficie adicional estereoscopia por foto:

Fn = A B = S²
$$\left(1 - \frac{p\%}{100}\right) \left(1 - \frac{q\%}{100}\right)$$

- Superson of the second seco
- Thtervalo entre exposiciones:

$$\Delta t = \frac{B}{Vg} = \frac{s \, mb}{Vg} \left(1 - \frac{p\%}{100} \right)$$

Para terreno accidentado se hace adoptar una cadencia de exposiciones variables, función del perfil del terreno a lo largo del eje de vuelo, ya que si adoptamos un intervalo constante, para las altitudes del terreno superiores a las del nivel de referencia, se tendrán recubrimientos insuficientes en las partes altas y excesivos en las bajas.

Arrastre de la imagen sobre la película:

El arrastre de la imagen sobre la película se detecta como una pérdida de la nitidez en ésta.

Al tomar fotografías y encontrarse la cámara en movimiento, será preciso regular el tiempo de exposición en combinación con la velocidad del avión, para que el arrastre que se origine se encuentre dentro de unos límites que se consideren tolerables, dentro del concepto de nitidez fotográfica. Las causas que pueden motivar el arrastre de la imagen son:

- Desplazamiento de la cámara en la dirección del vuelo.
- Vibraciones de la cámara transmitidas por el avión.
- Balanceo del avión.

El primer efecto es mucho mayor que los otros dos, los cuales con un buen montaje de la cámara sobre los sistemas de suspensión antivibrantes, buenas condiciones atmosféricas y un buen pilotaje, quedarán prácticamente anulados.

Siendo Vg (velocidad del avión), Δt (tiempo de obturación de la cámara) y Mb (escala de la imagen).

$$\Delta s = Vg \Delta t Mb$$

expresando Δs en μ m, Vg en Km/h y Δt en segundos

$$\Delta s \approx 278000 \ Vg \ \Delta t \ Mb$$

Ejemplo:

	Δs μm					
		∆t sg				
	Mb	1:100	1:200	1:300	1:500	1:1000
Vg	1:1000	278	139	93	56	28
100 km/h	1:5000	56	28	19	11	6
	1:10000	28	14	9	6	3

Para una determinada escala de la imagen, el avión deberá tener una velocidad de crucero tal que, combinada con los tiempos de exposición de la cámara, de un valor tolerable de nitidez ($\leq 0.03mm$).

1.2.9. Métodos de navegación fotográfica

Un método de navegación tiene por objeto guiar al avión entre un punto de partida y uno de llegada, conociendo su posición en todo momento. Generalmente las trayectorias vienen impuestas por el trabajo, de forma que el avión fotográfico no puede apenas separarse de su trayectoria, para asegurar el recubrimiento lateral. Existen varios métodos de navegación:

1.2.9.1. Navegación a simple vista con cartografía disponible

Se representan, sobre los mapas-índices, los ejes de vuelo o pasadas y la situación con el menor error posible, de los puntos principales de los fotogramas. El navegante tratará de seguirlos ayudado por la indicaciones de un telescopio de navegación, que permite usar referencias hacia adelante y hacia atrás.

Las pasadas irán numeradas, así como todos los fotogramas de inicio y fin de la pasada, que llevarán rotulado su número de exposición.

1.2.9.2. Navegación a simple vista sin cartografía previa

Muchas veces en los países en desarrollo, la cartografía de la zona está muy atrasada, es inexacta o no existe. En estos casos el navegante recurre a algún método " **sin mapa** " para obtener una completa cobertura fotográfica.

Existen diversos métodos de navegación sin cartografía, entre los cuales citaremos:

Sobrevuelo a mayor nivel:

Se usa este método cuando la zona de trabajo es relativamente pequeña (ciudades, áreas de ríos, pequeños proyectos de desarrollo, emplazamiento de presas......etc.).

Este método consiste en fotografiar inicialmente la zona de trabajo desde una gran altitud y a menor escala. Sobre las fotografías obtenidas anteriormente, se marcan las pasadas fotográficas a la escala correcta elegida para el vuelo final, ejecutando el vuelo basándose en la información obtenida.

En la utilización de este método, la primera operación que hay que decidir es la escala necesaria para sobrevolar el área. Hay que tener en cuenta el tamaño del área requerida y la escala a la cual el navegante tiene que volar la misión final.

Vuelo de franjas entrelazadas:

Este método se usa para zonas de trabajo más extensas.

Al igual que en el método anterior, se empezará por realizar un vuelo a una escala menor (mayor altitud), para preparar el material básico mediante franjas enlazadas (Fig.17). Se planificará la zona de trabajo a sobrevolar de manera que fuera mayor que la solicitada.

Obtenidas las copias, se unen entre si para formar franjas, estableciendo la línea central y las transversales de manera que el detalle común de ambas quede alineado. Sobre la franja central se dibuja un eje de vuelo y se agregan el resto de los ejes de vuelo a ambos lados, hasta completar la zona de trabajo a obtener. Establecidos todos los ejes de vuelo de las pasadas, se pueden numerar las pasadas para su organización, procediendo a realizar el vuelo a la escala final apoyándonos en la información aportada por las fotografías anteriores.



Figura 17. Vuelo de franjas entrelazadas.

> Navegación de línea lateral:

Es el método más simple desde el punto de vista de la planificación, pero exige un gran respaldo en cuanto a producción fotográfica.

Se basa en una o más pasadas principales que van a ser usadas para lo que se llama seguimiento de la línea lateral. De nuevo el bloque se planifica más grande de lo necesario.

Se realiza un vuelo de reconocimiento previamente para pruebas de exposición y planificación de la pasada principal. Efectuadas estas pruebas, se procede a la toma de las fotografías de la pasada principal con las especificaciones correctas para el vuelo; al final de la pasada el avión vuelve a la base y se procesa la película. Se hace un conjunto de copias y se forma la pasada trazando una línea central (eje de vuelo). A partir de ésta se trazan dos ejes paralelos con el recubrimiento lateral especificado. Una vez que están marcadas las dos nuevas pasadas se vuelve a realizar otro vuelo para la obtención de los fotogramas de las nuevas pasadas. El navegante usará como referencia para la toma de estas nuevas fajas, la línea del recubrimiento lateral, de esta forma tendrá una información terrestre visible en el área de recubrimiento q%.

Efectuadas estas nuevas tomas, el avión vuelve a la base, se obtienen las copias y sobre estas nuevas tomas se repite el proceso.

1.2.9.3. Sistemas de navegación avanzados

Los sistemas electrónicos de navegación están basados en el conocimiento de las coordenadas del avión respecto al terreno en cada momento del desarrollo del vuelo, con el fin de conducir automáticamente al vehículo a los puntos de exposición aérea, previamente establecidos en el planeamiento de vuelo.

Dentro de estos sistemas destacan los siguientes:

- VLF/Omega: El usuario introduce la posición exacta del avión en coordenadas geográficas antes del despegue y los sistemas calculan los movimientos X e Y relativos a partir del despegue, presentando al usuario la posición y velocidad con respecto a la tierra y los errores de trayectoria, incluyendo la deriva. Este sistema se basa en el principio de "volar desde".
- **Doppler**: Basado en el radar Doppler y con el mismo principio que el anterior, este sistema controlado por el navegante mide la distancia y rumbo desde una posición de partida conocida.
- INS (Sistema de navegación inercial): Basado también en el principio de "volar desde", este sistema hace uso de los cambios relativos de dirección medidos dentro del avión, para estimar las coordenadas X e Y desde un punto de partida conocido.
- Otros sistemas a destacar son el ANA y el I.T.C. (Photnav), los cuales tratan de compaginar los procedimientos de medición de distancia usuales para los trabajos topográficos de apoyo de campo y los instrumentos de control de las inclinaciones de los fotogramas. Los datos que suministran estos equipos, constituyen la base de datos para el cálculo electrónico de las coordenadas aéreas del avión y la corrección automática de su trayectoria aérea.
- **GPS** (Global Position System): en la actualidad es uno de los sistemas más utilizado en la realización de vuelos fotogramétrico, ya que permite obtener en modo cinemático posiciones en coordenadas X, Y, Z del orden del 0.5 m, permitiendo ser utilizado tanto en labores de navegación como en labores de obtención de ciertos elementos de la orientación externa, coordenadas de los centros de proyección (X₀, Y₀, Z₀), permite la generación automática de los gráficos de vuelo. En próximos temas se profundizará más detallada el sistema de posicionamiento global (GPS).

1.2.10. Condiciones para la toma de fotografías aéreas

La toma de fotografías aéreas se realizará cuando la altitud del sol sea óptima, es decir, en aquel espacio de tiempo en el cual, los rayos solares presenten una inclinación tal que las sombras arrojadas por los accidentes sea mínima, por ello las limitaciones serán mayores en terreno accidentado.

FOTOGRAMETRÍA III

No existe un criterio fijo para considerar la altitud solar mínima aceptable en el transcurso del año, pero suele adoptarse una altura mínima de 30° del sol sobre el horizonte y en regiones poco accidentadas puede llegarse a los 20° .

Cada región tendrá un periodo del año en el cual se cumplen estas condiciones. Así por ejemplo en España, en épocas comprendidas entre el 1 de Mayo y el 31 de Septiembre las tomas fotográficas se realizarán cuando la altitud del sol sobre el horizonte sea superior a 45°, pudiéndose considerar en el resto de los meses altitudes de 30°.

Los vuelos se realizarán con cielo despejado y cuando el terreno a fotografiar no tenga nieve, nieblas o brumas, que dificulten la claridad de los fotogramas.

1.2.11. Resultados directos de la toma fotográfica

The Negativos:

El soporte de la emulsión será de material indeformable (papel poliester), debiendo re - velarse inmediatamente después del vuelo, para proceder a una repetición eventual. Se revisará la calidad de la imagen así como los recubrimientos, eliminándose los fotogramas malos, volviendo a repetir el vuelo en las zonas afectadas. La información complementaria que debe aparecer en los márgenes de los clichés son: zona de vuelo, escala, número de pasada y de fotograma, fecha de obtención y hora, nivel indicativo de verticalidad, así como las características de la cámara empleada (número, distancia principal calibrada, marcas fiduciales).

Copias por contacto y contratipos:

Suelen realizarse copias contratipos de seguridad y diapositivas para la restitución. Se realizará también copias en papel por contacto.

Gráficos de vuelo:

Sobre la cartografía existente de la zona *(generalmente sobre el MTN 1:50000 y 1:25000)*, se dibujan las posiciones relativas de cada una de las fotografías, figurando los ejes de las pasadas y los recuadros de los fotogramas, con la numeración correspondiente. Los ejes de las pasadas, se representarán uniendo los puntos principales de los fotogramas, cuyo número dentro de la pasada sea múltiplo de 5 (enlace cada 5 fotogramas).

1.2.12. Especificaciones técnicas

En los siguientes apartados se expone de manera resumida un Pliego de Condiciones Técnicas Generales para Vuelos Fotogramétricos (IGN). En el *Apéndice A* se muestra un pliego detalladamente.

1. Condiciones para optar a la contratación.

Documentación prevista en la Ley de Contratos del Estado y demás disposiciones de aplicación.

- 2. Condiciones generales del trabajo.
 - 2.1. Zonas y superficies.
 - 2.2. Escala de imagen.
 - 2.3. Tipo de objetivo.
 - 2.4. Tipo de fotografía.
 - 2.5. Precio tipo e importe.
 - 2.6. Plazo de ejecución.

- 3. Cámara y equipo asociado.
 - 3.1. Cámara métrica. Formato del fotograma y distorsiones radiales residuos máximas.
 - 3.2. Calibrado. Certificado valido por un periodo de tiempo.
 - 3.3. Filtros.
 - 3.4. Ventanas para la cámara.
 - 3.5. Montaje de la cámara.
- 4. Cobertura fotográfica y vuelo.
 - 4.1. Cobertura fotográfica.
 - 4.2. Altura de vuelo. Variación entre el + 2% y el 5%.
 - 4.3. Dirección de las bandas.
 - 4.4. Recubrimientos. Longitudinal entre el 55% y el 65%, transversal entre el 20% y el 25%.
 - 4.5. Interrupción de pasadas.
 - 4.6. Rectitud de pasadas.
 - 4.7. Verticalidad de los fotogramas.
 - 4.8. Condiciones fotográficas.
- 5. Material fotográfico.
 - 5.1. Película.
 - 5.2. Exposición y procesado.
- 6. Documentación a entregar.
 - a. Película negativa original.
 - b. Colección de positivas contacto en papel.
 - c. Original y dos copias de cada uno de los siguientes gráficos:
 - Esquema de los puntos principales de todas las fotografías.
 - Esquema de la disposición de las fotografías individuales.
 - d. Copia del último certificado de calibración.
 - 6.1. Anotaciones en los rollos negativos.
 - 6.2. Información sobre los negativos.
 - 6.3. Colección de copias positivos en papel estable.
 - 6.4. Esquema o gráficos de vuelo.
 - 6.4.1. Gráfico de puntos principales.
 - 6.4.2. Gráfico de fotogramas.

1.3. Control terrestre. (puntos de apoyo)

En la fase de orientación absoluta se necesita conocer las coordenadas terrestre de una serie de puntos del fotograma, para poder ajustar la escala del modelo estereoscópico y realizar la nivelación de éste. El número mínimo de puntos para poder efectuar esta operación es de tres, dos puntos en *X*, *Y*, *Z* (Planimétrico-Altimétrico) para poder llevar a cabo el ajuste de la escala del modelo y un tercero en *Z* (Altimétrico) de manera que sumados a los dos anteriores, hacen un total de tres puntos de coordenadas altimétricas conocidas, para poder efectuar la nivelación del modelo.

La determinación de las coordenadas planimétricas (control horizontal) y altimétrica (control vertical) de estos puntos se conoce con el nombre de apoyo de campo. La realización de los trabajos topográficos y geodésicos que lleva consigo la fotogrametría, es necesario utilizar unos métodos y unos instrumentos que agilicen al máximo el levantamiento de los puntos de control.

La determinación de los puntos de apoyo puede realizarse:

 Utilizando procedimientos clásicos de la topografía, pudiéndose dividir los trabajos a realizar en dos fases:

1. Obtención de una red básica por medio de triangulaciones, trilateraciones, intersecciones o poligonales de precisión. Esta red básica irá enlazada a la red geodésica para permitir conocer las coordenadas absolutas.

2. Red de Apoyo fotogramétrico, constituida por puntos determinados por mediciones que se apoyan en la red anterior.

• Utilización de *GPS*. Estos aparatos agilizan mucho la toma de datos en campo, ya que no están condicionados a las observaciones clásicas de los instrumentos topográficos.

A la hora de efectuar estos trabajos, es de vital importancia la existencia de redes geodésicas, así como su densidad y el estado de materialización en el terreno. En aquellas zonas donde estas redes son escasas o no existen, incrementan los trabajos de control terrestre, así como en zonas con una gran vegetación y terreno accidentado.

1.3.1. Número y distribución de los P.A. fotogramétricos

Anteriormente se ha hecho mención del número mínimo teórico de puntos de apoyo en un par, pudiéndose añadir otros para tener un control del modelo. Podemos adoptar la distribución de la Fig.17, donde aparecen conjuntamente ciertos puntos que son a la vez planimétricos y altimétrico; cuatro puntos con coordenadas X, Y, Z (planimétricos-altimétricos) teniendo, dos puntos de control para la puesta en escala del modelo, el quinto punto de coordenada Z (altimétrica), nos daría, unido a los cuatro anteriores un total de cinco puntos altimétricos, resultando dos de control, permitiendo de este modo verificar los basculamientos del modelo y las deformaciones de la imagen, por medio del punto central.



Figura 18. - Distribución de los puntos de control terrestre.

La distribución de los puntos de apoyo en las esquinas del modelo, viene condicionada por el hecho de que estos deben servir de apoyo para la pasada superior e inferior, e igualmente para los fotogramas antecedente y precedente, con el fin de obtener el mínimo de puntos precisos de control terrestre.

Además del criterio de economía, existen razones de precisión, ya que al efectuar la restitución, resulta arriesgado realizarla fuera de los límites que encierra el cuadrilátero que une estos puntos. También puede decirse en favor a esta distribución, el poder contar con las máximas distancias para dar escala al modelo y para corregir las inclinaciones longitudinales y transversales de la fase de orientación absoluta.

No obstante esta distribución no siempre es posible.

1.3.2. Elección de los P.A. fotogramétricos

Se realiza de forma aproximada en gabinete, donde con ayuda de la cartografía existente y los fotogramas del vuelo, se van examinando los entornos donde pueden elegirse en campo.

La elección de los P.A. debe responder a los siguientes criterios:

- El detalle planimétrico deberá ser perfectamente identificable en todos los fotogramas.
- Los puntos se elegirán dentro de la zona marcada en gabinete, con la finalidad de que cumplan los requisitos para la realización de la orientación absoluta del modelo.
- Si es posible, los puntos quedarán definidos por alineaciones rectas, tales como esquinas de corrales, esquinas de casas, cruces de caminos.....etc. Si se trata de un detalle natural, se elegirán aquellos cuyo valor sea "ml×mb".
- Preferentemente serán un detalle artificial y estable.
- Los puntos altimétricos será conveniente escogerlos sobre partes del terreno de muy débil pendiente (lo más horizontal posible), evitando en lo posible los detalles que se presten a una mala puntería estereoscópica (playas brillantes, arenas....etc.).
- Los puntos de apoyo se pinchan en todos los fotogramas y se marcan en la fotografía por medio de un círculo, teniendo como centro el pinchazo de identificación y un número de serie.

1.3.3. Preseñalización de los puntos de apoyos

En planos a escalas grandes, destinados principalmente a la ingeniería es necesario tener en cuenta, a la hora de realizar la planificación del levantamiento, la fase de replanteo del proyecto.

Proyectada la obra, deberá contarse con los suficientes elementos que aseguren plasmar en el terreno el diseño realizado. Estos requerimientos difícilmente nos lo encontraremos en la naturaleza, y aunque la zona objeto del estudio ofrezca gran cantidad de detalles artificiales, muy pocos consiguen ser útiles para emplearse con dicho fin.

La manera de salvar estos inconvenientes es mediante la preseñalización, consistiendo esta en la materialización en campo de una serie de señales, previamente a la realización del vuelo, distribuidas según una densidad y forma, para poderlas utilizar como puntos de apoyo fotogramétricos.

La forma de estas señales adoptada más generalmente es la cuadrada, en las que el material utilizado es de aluminio, contrachapado o cartón. Las dimensiones de estas señales variarán con la escala de la fotografía.

• Para escalas pequeñas (≈ 1:18000)	75 x 75 cm.(*)
• Escalas medias (≈ 1:7500)	30 x 30 cm.(*)
• Escalas grandes (≈ 1:3000)	15 x 15 cm.(*)

Otra forma adoptada en algunos organismos es la circular, constituida por círculos blancos trazados con cal sobre el suelo, previamente limpio, pudiéndose mejorar sustituyendo los círculos por cruces.

^(*) Cifras aproximadas

1.4. Estimación de los costos

Los costos de la ejecución de un vuelo fotogramétrico suelen expresarse por superficie (para bloques) o por kilómetros (caso de traza), y es de importancia poder relacionarlos en función de las distintas escalas de la imagen.

Los precios que se presentan en tablas son orientativos, puesto que se ha prescindido de todas las variables que inciden en el coste de estos trabajos (superficie, orografía, climatología, arbolado,...... etc.).

Hay que tener en cuenta en la estimación de costes el punto de partida del avión fotogramétrico y el incremento de precio hasta llegar a la zona objeto de trabajo.

Tarifa de precios en tablas del Ilmo Colegio Oficial de Ingenieros T. en Topografía.

1.5. Anexo

A continuación se van a citar las fases para la confección de mapas por fotogrametría aérea:

- 1. Proyecto de vuelo.
 - 1.1. Mapa de vuelo.
 - 1.2. Especificaciones técnicas.

2. Vuelo.

- 2.1. Documentación requerida (negativos, contactos,.....etc.).
- 3. Planificación del control terrestre.
 - 3.1. Gabinete (elección de los P.A. en la cartografía previa).
 - 3.2. Campo. Toma de datos.
 - 3.3. Campo + Gabinete. Cálculos de los P.A., aerotriangulación.

4. Restitución.

Dependiendo del restituidor (analógicos, analíticos)

- 4.1.-Orientación interna.
- 4.2. Orientación relativa.
- 4.3. Orientación absoluta.
- 4.4. Restitución propiamente dicha.
- 5. Ultimación.

Revisión e inclusión de información diversa.

6. Estimación de los costes

Bibliografía

- American Society of Photogrammetry. Manual of Photogrammetry, ASPRS, Cuarta Edición (1980), 0-937294-01-2.
- Burnside, C.D., Mapping from Aerial Photographs, Collins Professional, Londres, Segunda Edición (1979), 0-00-383036-5.
- Clavo, D., Fotogrametría II. (EPM EUITT).
- Curso sobre técnicas fotogramétricas y sus aplicaciones, CEDEX (MOPTMA), Madrid (1994).
- Gómez, A., Fotogrametría Analítica (E.P.M. ETSIA).
- Ghosh, S.K., Phototriangulation, Lexingtong Books, Londres (1975), 0-669-98210-5.

- Ghosh, S.K., Analytical Photogrammetry, Pergamon Press, Oxford (1988), 2^a Edición, 0-08-036103-X.
- Paul R. Wolf, Bon A. Denwilt; Elements of Photogrammetry, 3^a Edición.
- Wolf, P.R.; Dewitt, B. A, Elements of Photogrammetry with Applications in GIS, McGraw-Hill, EEUU, Tercera Edición (2000). 0-07-292454-3.

TEMA 2

INTRODUCCIÓN A LA AEROTRIANGULACIÓN

2.1. Introducción

2.2. Fases de que consta el proceso de aerotriangulación

2.2.1. Fase de preparación

2.2.1.1. Recepción del material

2.2.1.2. Elección, numeración y señalización de los puntos de control menores

2.2.1.3. Preparación del mapa índice de modelos o canevás general

2.2.2. Fase de captura instrumental de datos

2.2.3. Fase de procesamiento de datos

2.3. Clasificación de los métodos de triangulación aérea

2.4.. Principio de la aerotriangulación

2.5. Fuentes de error en la triangulación aérea

2.6. Aplicaciones de la triangulación aérea

Bibliografía

2.1. Introducción

La aerotriangulación¹ tiene por objeto obtener las coordenadas de diversos puntos del terreno mediante los procedimientos de la fotogrametría.

Fue concebida para efectuar los levantamientos topográficos por medio de la fotografía, reduciendo al mínimo los trabajos a realizar en campo. Necesita no obstante, apoyarse sobre puntos de posición conocida en el terreno y que tendrán que determinarse en campo por métodos geodésicos y topográficos.

El objetivo de la aerotriangulación es obtener la posición del mayor número posible de estos puntos de apoyos mediante operaciones fotogramétricas de gabinete, reduciendo por tanto los trabajos a realizar en campo.

¹ Aerotriangulación, también conocida con el nombre de triangulación aérea o fototriangulación. Este último término es quizás más general, ya que el procedimiento puede ser aplicado tanto a fotos aéreas como terrestres.

FOTOGRAMETRÍA III

Dentro del conjunto de tareas que conllevan las ejecuciones cartográficas por procedimientos fotogramétricos se encuentra la fase de orientación absoluta, consistente en dar escala y nivelar el modelo estereoscópico a partir de una serie de puntos de posición conocida.

Para grandes proyectos, el número de puntos de control (puntos de apoyo) necesarios es enorme, y el coste de realización puede ser extremadamente alto si es realizado exclusivamente por métodos de medición en campo. Muchos de estos puntos de control necesarios se establecen rutinariamente por aerotriangulación desde una escasa conexión de control terrestre de trabajos de campo y unos sustanciales ahorros en coste. Una más reciente innovación reside en el uso del GPS cinemático en el avión para proveer de coordenadas a la cámara en el momento de cada exposición. En teoría este método de control de GPS puede eliminar lo necesario para el control terrestre, aunque en la práctica, una pequeña cantidad de control terrestre se usa todavía para fortalecer la solución.

Además de tener una ventaja económica sobre las mediciones en campo, la aerotriangulación aporta otros beneficios:

- La mayor parte del trabajo se hace en gabinete, minimizando retrasos por condiciones adversas.
- No hay que acceder demasiado al área del proyecto.
- Se reduce mucho el trabajo de campo en áreas difíciles.
- El ahorro del trabajo de campo necesario para formar los puentes se verifica durante el proceso de aerotriangulación y como consecuencia de esto crea posibilidades de control de valores erróneos para después en la iniciación de la formación ser minimizados y usualmente eliminados.

Esta última ventaja es tan significativa que algunas organizaciones llevan a cabo la formación de puentes aunque exista un control adecuado de medidas en campo. Es por esta razón que algunas especificaciones para proyectos de mapas requieren el uso del establecimiento de control fotográfico.

La idea surgió hacia 1940, fecha en la que haciendo mediciones sobre dos fotografías se calculaban puntos de un modelo (aerotriangulación de un bloque de un único modelo). Posteriormente y mediante empalme de varios modelos consecutivos de una misma pasada se obtenía a la vez la orientación absoluta de todos los modelos y las coordenadas de los puntos en cada uno de los modelos; el empalme se realizaba por los puntos comunes entre dos modelos consecutivos. Obtenidas varias fajas consecutivas podía establecerse una compensación. El método se denominó *Aeropligonación*.

Debido fundamentalmente a la escasez de medios de cálculo era preferible reducir el tiempo de procesamiento de los datos (compensación) aumentando el tiempo de medición usando fotogramas con una escala menor, aparatos de muy alta precisión de medida, realizando el mínimo calculo posible. Los aparatos usados hasta entonces fueron de primer orden, muy estables, sólidos y precisos, provistos de paralelogramo de Zeiss y mecanismos ópticos de inversión de imágenes para el empalme de modelos de una misma pasada, los cuales resultaban muy caros. (*p.e. Wild A-7, Zeiss C-8*).

A partir de 1960 el aparato de cálculo estuvo dispuesto, con suficiente velocidad de operación, dejando paso a otros tipos diferentes de compensación, como son el método de haces de rayos y el de los modelos independientes.

En aerotriangulación es común denominar a los puntos determinados en campo (apoyo de campo), como puntos de control. A los puntos que se determinan mediante aerotriangulación se denominan puntos enlace y paso. Algunas veces, podremos encontrarnos con las denominaciones de puntos de control mayores y menores, haciendo referencia los primeros al apoyo en campo y los segundos a los puntos obtenidos por aerotriangulación.

Llamaremos *pasadas (bandas o fajas)* al conjunto de fotografías efectuadas por el avión en la dirección del vuelo. Con el nombre de *bloque* entenderemos el conjunto de fotografías o modelos que componen el vuelo fotogramétrico que recubre una determinada zona objeto de nuestro trabajo. Como

puente al conjunto de fotografías, parte por lo general de una pasada y/o bloques de fotos, con puntos de control (apoyo) en amos extremos, y que va a ser objeto del proceso de aerotriangulación.

2.2. Fases de que consta el proceso de aerotriangulación

En el proceso de aerotriangulación se pueden diferenciar tres fases según la función a realizar:

- Fase de preparación.
- Fase de medición o captura instrumental de datos.
- Fase de procesamiento de datos (transformaciones y ajustes de coordenadas en el ordenador).

2.2.1. Fase de preparación

En esta fase se pueden diferenciar tres apartados:

- Recepción del material.
- Elección, numeración y señalización de los puntos de control menores (puntos de apoyo complementarios *Puntos de paso y enlace* –).
- Preparación de un mapa índice de modelos o esquema general del canevás de puntos.

2.2.1.1. Recepción del material

Los trabajos de aerotriangulación comienzan cuando se recibe la colección de fotogramas del bloque y la documentación relativa a los puntos de apoyo de campo que vamos a utilizar como soporte de los cálculos. Las personas encargadas de estos trabajos entregarán:

- La colección de negativos del vuelo de la zona.
- Una colección de contactos en papel de los negativos donde figuren los puntos de apoyo numerados y pinchados.
- Cuadernos de campo, listado de coordenadas de los puntos, croquis y reseñas de estos.
- Esquemas de la distribución del apoyo respecto del canevás general del vuelo en el que estén reflejadas las pasadas de con las fotografías.

Se deberá comprobar que la posición de los puntos de apoyo de campo es la mas adecuada para el método y los programas de cálculo y ajuste que vayamos a usar en la fase del procesamiento de datos.

El número y distribución de puntos de control (apoyo) del aerotriangulación que se esté empleando. Con métodos de compensación rigurosos podemos establecer las necesidades de control de un bloque de cualquier tamaño y forma son:

- Control planimétrico: puntos de control distribuidos en el perímetro del bloque, y separados una distancia que se expresa en número de modelos o longitudes de base, que depende de la precisión planimétrica que queramos alcanzar. A esta distancia entre puntos de control se le denomina distancia puente. El valor medio de esta distancia puente se puede cifrar en 4 modelos (un punto de control situado en el perímetro cada cuatro modelos) figura 1-a.
- Control altimétrico: cadenas completas de puntos de control a través de bloque. Los puntos de control a lo largo de una cadena son convenientes situarlos en las zonas de solape transversal entre pasadas. La separación de estas cadenas depende de la precisión altimétrica que queramos alcanzar. Un valor medio de distancia puente entre las cadenas de puntos puede ser de 4 modelos (un punto de control altimétrico cada cuatro modelos) figura 1-b.

Lo normal es situar cadenas de puntos planimétricos-altímétricos, cada cuatro modelos.

FOTOGRAMETRÍA III

La influencia de la distancia puente en la precisión final de las coordenadas ajustadas se estudiará en el apartado referente al análisis de precisiones.

El empleo de la aerotriangulación no solo reduce el número de puntos de control necesarios, con respecto al apoyo de campo completo, sino también flexibiliza su distribución, ya que no tenemos la limitación de situar forzosamente el punto de control en la zona común de recubrimiento para varios modelos y pasadas. Y además el diseño de las cadenas de puntos a lo largo del bloque puede ser variado para evitar zonas de dificultad topográfica.



Figura 1-a. Puntos de control planimétrico.





2.2.1.2. Elección, numeración y señalización del apoyo complementario (puntos de control menores)

En esta fase se procederá a elegir los puntos complementarios (paso y enlace) de forma que unan todas las fotografías o modelos de un bloque en sentido longitudinal a lo largo de la pasada y transversal entre pasadas. De estos puntos a priori no conocemos sus coordenadas, precisamente se van a determinar mediante la aerotriangulación y serán los que se utilicen posteriormente en la fase de orientación absoluta.

- Puntos de paso. Tienen un doble propósito, en aerotriangulación se usarán para enlazar modelos individuales para la formación de la pasada y durante la fase de restitución servirán para realizar la orientación absoluta de los modelos. Estos puntos se eligen en la zona de recubrimiento común entre dos modelos, es decir, deberán aparecer en tres fotografías sucesivas de una pasada. Se situarán dos puntos en los extremos (centro del recubrimiento longitudinal de pasadas adyacentes) y el tercero en el centro (Fig. 5 y 6).
- Puntos de enlace. El propósito de estos es conectar una pasada a la adyacente del bloque. Se
sitúan en el centro de recubrimiento transversal común entre dos pasadas. Usualmente se utiliza el mismo punto para unir modelos sucesivos y pasadas adyacentes (*Fig. 5 y 6*).

Se empieza por dibujar en los contactos de papel las zonas de solape entre fotogramas adyacentes para determinar los entornos dónde se van a situar los puntos. En el interior de las zonas comunes y en el centro se señalará, en la fotografía central de cada tema una pequeñas área circular de 1 cm de diámetro aproximadamente, dónde se situarán los puntos y a continuación se numeran de forma sencilla o siguiendo un cierto código que nos indique la situación del punto dentro del bloque, de tal forma que no coincida con el resto de puntos que intervienen en la aerotriangulación.

Una forma usual de numerar estos puntos, es la de asignarle el número de la fotografía añadiéndole un código. A los centros de proyección suelen asignárseles el número de fotografía (*Fig. 2*).



Figura 2. Numeración de puntos.

Otro sistema de numeración de puntos que permite identificar fácilmente la función del punto y la posición que ocupa tanto en el fotograma como en el bloque es la siguiente fotografía (*Fig. 3*):

- Los puntos de apoyo mantienen la numeración seguida en los trabajos topográficos-geodésicos.
- El resto de puntos (excepto los centros de proyección, que vendrán numerados con el número de fotograma) disponen de una numeración que consta de 6 dígitos, cuyas características son:
 - El primer y segundo dígito describen conjuntamente la posición del punto en la pasada. La numeración de los dígitos va de izquierda a derecha.
 - El primer dígito es igual al número de la pasada.
 - Si el punto se sitúa en la zona de recubrimiento entre pasadas y además se utiliza como punto de paso entre las mismas, entonces el segundo dígito indicará el valor de la segunda pasada; en caso contrario, el segundo dígito será igual a 0.
 - El tercer dígito describe la tarea asignada al punto medido en la formación del bloque. Así pues, tendremos que si se utiliza para:

Orientación relativa (o.r.)	su	valor es	1.
P Conexión de modelos (c.d.m.)	د	· 2.	
Conexión de pasadas (c.d.p.)		"	3.
☞ o. r. y c. d. m.	"	5.	
☞ c.d.m. y c.d.p.	"	6.	
☞ o.r. y c.d.p.	"	7.	
☞ o.r. y c.d.m. y c.d.p.	"	8.	

 Los tres últimos dígitos definen el número del punto en la pasada. Generalmente en cada pasada se adopta un intervalo (prefijado de antemano) múltiplo de una cantidad constante. Por ejemplo:

									_					
	∆156 ⊙ 101001	⊙ 105002	2	⊙ 105003		⊚ 10500		⊚ 10500	15	⊚ 105006	⊙ 105007	∆ 157 ⊙ 101008		
P-1 →	⊙ 101009 ⊙ 2850	o 2851 o 105010		© 2852 © 105011		© 105012 © 2853	1	© 2854 ⊙ 105013		⊙ 105014 ⊙ 2855 ⊙ 102015	o 2856 o 105016	∞ 2857 ⊙ 101017		
	⊙ 128101	⊙ 128102		⊚ 128103		⊙ 128104		⊙128105		⊙ 128106	⊚ 128107	⊙ 127109		
P-2 →	© 201110 ⊙ 2875	⊙ 2876 ⊙ 205111	c	⊙ 205112 ⊙ 2877		⊙ 2878 ⊙ 205113		⊙ 2879 ⊙ 20511	4	⊙ 205115 ⊙ 2880	0 2881 0 205116	0 2882 0 201117		
	⊙ 201118 ▲ ¹⁸¹	© 205119	•	⊙ 205120		⊙ 205123		⊚ 20512	2	⊙ 205123	⊙ 205124	∆182 ⊙ 201125		

en la primera pasada, los puntos se podrían numerar desde el 001 al 100; en la segunda, desde el 101 al 200, etc.



Toda esta operación se realiza con ayuda de un estereóscopo, para comprobar que las zonas elegidas para los puntos de enlace son sensiblemente llanas y sin vegetación, para que durante la fase de medición el operador pueda situar la marca flotante sobre el terreno con precisión.

La siguiente operación consiste en marcar en la emulsión de las diapositivas o negativos originales los puntos de paso y enlace, transfiriendo los puntos superior e inferior a las pasadas adyacentes, en caso de que actúen de enlaces de pasadas. Esta señalización se realiza con los instrumentos adecuados (transferidores y marcadores – PUG - Fig. 4).

Esta transferencia de puntos es una de las operaciones más delicadas de la triangulación, ya que de su perfecta ejecución depende la precisión en la formación del bloque. Su realización se hace observando estereoscópicamente los fotogramas de las pasadas, por medio de estos instrumentos (transferidores y marcadores), actuando los elementos de marcado como "marca flotante".



Figura 4. Transferidor de puntos, Wild PUG-4.

Con este instrumento se sitúan un par estereoscópico de diapositivas en las placas. Las diapositivas se observan estereoscópicamente a través de un binocular. Mediante medidas de los tornillos de movimiento lento, las diapositivas pueden ser ajustadas superficialmente en las direcciones x e y hasta que la marca flotante, construida por dos medias marcas, aparezca posada exactamente en el punto a marcar. La marca se establece sobre la emulsión fotográfica, y puede ser realizada por percusión, ignición por rayo láser o mediante rotor que levante la emulsión. A esta marca se le conoce como pinchazo y a la operación como pinchar las diapositivas. Conviene distinguir este pinchazo sobre la diapositiva con el pinchazo realizado sobre el contacto en la fase de apoyo de campo.

Con los puntos marcados por el transferidor de puntos, se realizan pequeños agujeros sobre los cuales la emulsión ha quedado destruida. Por consiguiente el refinamiento en la identificación de la posición de la imagen se puede hacer y no se fija ningún error en posicionamiento. Esta operación se debe hacer con extrema precaución.

Alrededor de cada marca se dibuja un círculo para facilitar la localización del punto. Cada diapositiva irá provista de tres puntos pinchados en la sección central (uno en la parte superior, otro en el centro y otro en el extremo inferior).



Figura 5. Señalización de los puntos en cada imagen.

Cuando se hacen mediciones de puntos en aerotriangulación observándose las fotografías en modo estereoscópico con estereocomparador, solamente se marcan tres puntos de paso cerca del eje y de cada foto (*Fig. 5*). Los estereocomparadores miden simultáneamente fotocoordenadas de puntos correspondientes a diapositivas de un par estereoscópico. Durante la observación a través de los binoculares, las posiciones de las diapositivas se ajustan hasta que la marca flotante se pose sobre el punto deseado exactamente. En esta posición las medidas se registran para ambas fotografías.

Cuando tenemos pares estereoscópicos de fotos con puntos de paso marcados igual que en la figura nº 5 se orientan en un restituidor, seis puntos aparecen en cada modelo como muestra la figura nº 6. El operador verá una escena ligeramente confusa. Mientras el área circundante por los puntos de paso se verá estereoscópicamente, el agujero taladrado aparecerá solamente en el ocular derecho o izquierdo pero no en ambos. Con práctica, un operador puede colocar con precisión la marca flotante en el lugar deseado de la imagen. Una vez que la marca flotante está situada el lugar deseado, se miden las fotocoordenadas x e y de las mitades de marca derecha e izquierda.



Figura 6. Localización de puntos en dos modelos adyacentes.

En el caso de usar en aerotriangulación analítica un monocomparador, es necesario ver las imágenes de todos los puntos de paso en cada fotografía. En los puntos de paso marcados artificialmente para medidas en monocomparador, algunos puntos tales como 28511, 28512 y 28513 de la figura 7 aparecen en tres fotos sucesivas. Cada uno de esos puntos puede estar localizado arbitrariamente en una fotografía, normalmente en el centro de la misma sobre la cual aparecen; pero una vez marcados, deben ser cuidadosamente transferidos a sus correspondientes situaciones en las dos placas adyacentes.



Figura 7. Señalización de los puntos en cada imagen, para medida en un monocomparador.

En aerotriangulación digital la selección de puntos de paso se realiza automática mediante tratamiento de imágenes digitales, que es el paso esencial de un proceso comúnmente denominado aerotriangulación automática. En este método los puntos se seleccionan en las áreas de recubrimiento de las imágenes digitales y automáticamente se hacen coincidir entre imágenes adyacentes, por tanto se consigue simultáneamente la selección de los puntos de paso y la medición de las fotocoordenadas. Este método requiere una pequeña intervención del operador y es por tanto un proceso muy económico. Un beneficio añadido es que se pueden generar un gran número de puntos de paso con un mínimo esfuerzo, lo cual añade redundancia y refuerza la solución de la aerotriangulación.

2.2.1.3. Preparación del mapa índice de modelos o canevás general

Es conveniente para la organización de los trabajos, tanto de aerotriangulación como de restitución, disponer de un gráfico general con la distribución de todos los modelos del bloque en el que se incluyan tanto los puntos de apoyo terrestre como los fotogramétricos debidamente numerados. Este gráfico se puede hacer manualmente, antes o durante proceso de captura, a una escala aproximada o en un plotter automático una vez finalizado el ajuste (*Fig. 8*).

			-					-				
	∆156 ⊙28501	⊙ 28511		⊙ 28521	⊚ 28531		⊚ 28541		⊙ 28551	⊘28561	∆ ¹⁵⁷ ⊚ 28571	
P-1 →	⊗ 28502	© 28512		⊗ 28522	⊙ 28532	7	⊙ 28542		⊙ 28552	_⊙ 28562	⊙ 28572	
	⊘ 28503	⊙ 28513		⊙ 28523	⊚ 28533		⊙ 28548		⊚ 28553	⊚ 28563	⊙ 28573	
P-2 →	<u>o</u> 28752	⊙ 28762		⊙ 28772	© 28782		© 28792		© 28802	⊙ 28812	⊙ 28822	
	© 28753 ▲181	⊙ 28763		⊙ 28773	© 28783		© 28793		_O 28803	© 28823	∆182 ⊙28833	

Figura 8. Gráfico general del bloque fotogramétrico (mapa índice).

2.2.2. Fase de captura instrumental de datos

El proceso varía según el método de aerotriangulación empleado, pero en esencia consiste en colocar los pares estereoscópicos en el instrumento de medición y tomar los datos necesarios para su posterior procesamiento.

El instrumento y los programas disponibles nos condicionan las operaciones a realizar. Así, podemos formar la pasada en la fase instrumental por el método de aeropoligonación o esta fase puede terminar con la medición de fotocoordenadas en el método analítico. En el primer caso, la orientación externa tiene lugar en el instrumento y, en el segundo, esta operación se realiza en el ordenador, resolviendo matemáticamente la relación entre las coordenadas de la imagen fotográfica medidas en el sistema tridimensional de coordenadas terreno o modelo. Pero ambos métodos tienen en común la medición de coordenadas de todos los puntos (de campo o puramente fotogramétricos), sea en el modelo o en la diapositiva, directamente por medio de los índices de medición que, gobernados por manivelas y pedales u otros dispositivos, se van posando en los puntos previamente seleccionados.

2.2.3. Fase de procesamiento de datos

Las observaciones obtenidas en la fase instrumental (medición), conjuntamente con las coordenadas terreno de los puntos de control constituyen los datos de entrada para el cálculo y ajuste del bloque. El resultado será la relación de coordenadas ajustadas y las discrepancias obtenidas en los puntos de control y en los puntos de paso y enlace internamente.

También esta fase está condicionada por el método de aerotriangulación que se utilice, así pueden presentarse los casos siguientes:

- En el caso de aerotriangulación por Pasadas o Aeropoligonación:
 - 1. Transformación y ajuste de las pasadas.
 - 2. Formación del bloque.
 - 3. Ajuste del bloque.

- En el caso del método de *Modelos Independientes*, pueden seguirse dos caminos:
 - 1. Formación analítica de las pasadas (transformaciones 3D de los modelos de la pasada).
- 2. Formación analítica del bloque (unión de todas las pasadas).
- 3. Ajuste del bloque.

- 1. Formación analítico del bloque (transformación 3D de todos los modelos del bloque a la vez).
- 2. Ajuste del bloque.
- En el caso Analítico, se pueden seguir dos vías una secuencial y otra simultánea:

Secuencial Simultáneo

- 1. Formación analítica de los modelos.
- 2. Formación analítica de las pasadas.
- 3. Formación analítica del bloque.
- 4. Ajuste del bloque

- 1. Formación analítico del bloque (transformación 3D de todos los modelos del bloque a la vez).
- 2. Ajuste del bloque.

Para todos los casos se hará una comprobación final de los modelos al terminar el ajuste.

Para el ajuste de un bloque fotogramétrico, tres son los métodos analíticos utilizados: el método secuencial, el método de modelos independientes y el método de ajustes simultáneos. Los dos primeros son lógicas extensiones al dominio de la Fotogrametría analítica de la aerotriangulación practicada con instrumentos analógicos (restituidores). Sus principales características son las siguientes:

Método secuencial: en este método, desarrollado a finales de los años cincuenta por National Council Research (NCR) y el British Ordenance Survey (BOS), las etapas fundamentales son:

- Formación de pasadas con respecto a un sistema de coordenadas rectangular arbitraria (orientación relativa)
- Transformación de las coordenadas modelo al sistema terrestre de referencia respecto del cual se conoce la posición de los puntos de control (orientación absoluta).

Suponiendo una orientación arbitraria para la primera fotografía de la pasada fotogramétrica, la primera etapa consiste esencialmente en la determinación de la orientación de cada fotografía con respecto a la precedente. Debe procederse además a un ajuste en la escala del modelo resultante al anterior mediante puntos comunes a ambos modelos. Tanto en el método desarrollado por el *NCR* como en el *BOS* la orientación relativa se obtiene por medio de la condición de coplaneidad. El resultado final es una banda continua referida al sistema de coordenadas del primer modelo.

Método de modelos independientes: En este caso el modelo del bloque fotogramétrico se orienta independientemente de forma relativa. El resultado es un conjunto de modelos independientes cada uno con su propio sistema de referencia y su propia escala. El ajuste global del bloque fotogramétrico consiste entonces en una orientación absoluta simultánea utilizando todos los puntos de control disponibles y los puntos de paso y enlace. La principal ventaja del método de modelos independientes es que admite como datos de entrada modelos orientados tanto analítica como analógicamente. La orientación absoluta simultánea de todos los modelos en el bloque fotogramétrico se consigue por medio de transformaciones de semejanza *(tipo Helmert)*.

The método que se separa radicalmente de estos métodos más tradicionales es el de ajuste simultáneo (*Bundle Method*), en donde de forma simultánea y no secuencial se ajusta el bloque fotogramétrico de una forma que podemos denominar (integrada). La principal diferencia con el método secuencial y el de modelos independientes es que la solución (*coordenadas X, Y, Z de los puntos de paso y enlace*) se obtiene directamente y no se efectúan las orientaciones relativas y absolutas de forma separada: en efecto, a partir de las coordenadas imagen (*x, y*) de las imágenes de los puntos de paso y control, en un ajuste de mínimos cuadrados, se estiman las coordenadas terreno *X, Y, Z* de los puntos de paso y los elementos de orientación exterior de las fotografías. Los observables y los parámetros están relacionados mediante las ecuaciones de colinealidad en un modelo funcional del tipo L = F(X) de observaciones indirectas.

MÉTODO	FAS	SE INSTRUMENT	AL	FASE ANALÍTICA						
A N A L	Formación de	Formación del Modelo	Formación de	Compensación de Pasadas (Independientes)	Compensación de un Bloque de Pasadas					
G I C A	los Haces	y Medida de Coordenadas	la Pasada	Compensación en bloque de pasadas						
S E M I	Formación	Formación del	Formación	Compensación de Pasadas (Independientes)	Compensación de un Bloque de Pasadas					
A N A L Í	de los	Modelo y Medida	Pasada/s	Compensación en Bloque con Pasadas Compensación en Bloque a partir de Modelos o Secciones						
T I C A	Haces	de Coordenadas	Modelos o Secciones							
A N A	Medida	Formación de los haces y	Formación de la/s Pasada/s	Compensación de Pasadas (Independientes) Compensación en I	Compensación de un Bloque de Pasadas Bloque con Pasadas					
L Í T I C	de Coordenadas Placas	ael Modelo	Modelos o Secciones	Compensación e de Modelos	n Bloque a partir s o Secciones					
A			Compensaci	ón en bloque con haces de rayos						

Figura 9. Esquema de la fase de adquisición y procesamiento de datos según Jordan, Eggert y Kneissal.

2.3. Clasificación de los métodos de triangulación aérea

Existen varios criterios para establecer la clasificación de los métodos de aerotriangulación, cada uno de ellos tiene sus condicionantes como puede ser el instrumental necesario para su aplicación y cálculo.

- Respecto de la *unidad de trabajo*:
 - Modelos aislados.
 - Pasada simple.
 - •Bloque de pasadas.
 - Bloque de secciones.
- Respecto al *control terrestre*:
 - Con control geodésico.
 - Sin control geodésico.
- Respecto al modo de operar (es la clasificación más utilizada):
 - Planimetría o Radial:
 - 🖙 Gráfica.
 - Sumérica.
 - Pecánica.
 - •Espacial (X, Y, Z)
 - Panalógica: triangulación por pasadas o aeropoligonación.
 - Semianalítica: modelos independientes.
 - P Analítica: secuencial o simultánea.

Los métodos espaciales han venido utilizándose desde los años 60 (en España) ininterrumpidamente hasta hoy. Pasamos revista a continuación, de una manera sucinta, a estos métodos. En sucesivos capítulos se verán algunos de estos métodos con mayor profundidad.

Los procedimientos analógicos incluyen la realización manual de la orientación relativa y absoluta de los modelos, utilizando instrumentos de restitución provistos de intercambiadores de bases y caminos ópticos, seguido de la medición de las coordenadas instrumentales (modelo). El ajuste posterior, para obtener las coordenadas bloque, se hace de forma gráfica o de forma analítica. Este procedimiento únicamente solo tiene interés histórico al igual que los métodos radiales.

En la aerotriangulación semianalítica se hace solamente la orientación relativa (formación del modelo estereoscópico se realiza de forma analógica) y la medida de las coordenadas en el restituidor (instrumentos universales). La orientación absoluta se hace de forma analítica, así como el ajuste y determinación de las coordenadas bloque.

El método analítico consiste en la medición de coordenadas fotográficas seguido de la determinación analíticamente de las orientaciones relativa y absoluta y de las coordenadas bloque ajustadas.

De todos estos procedimientos, existe una gran cantidad de variantes según su adaptabilidad a los siguientes factores:

- Instrumentos disponibles.
- Aspectos económicos.

- Preferencias.
- Facilidad de acceso a programas.
- Precisión y tipo de aplicación.

En la mayoría de los casos, la formación y el ajuste del bloque se realiza en una sola operación.

Hay que añadir que las coordenadas de los puntos que se lean en el instrumento, han ser corregidas de errores sistemáticos (esfericidad, refracción, distorsiones, etc.); para ello, es necesario introducir en el cálculo los valores que nos permitan calcular estas correcciones.

Si se dispone de datos auxiliares (observaciones GPS, estatoscopio², barómetros de precisión³, APR⁴) también han de ser integrados en el cálculo con objeto de reducir al máximo el número de incógnitas y obtener un resultado lo más homogéneo posible.

2.4. Principio de la triangulación aérea espacial.

Con el objeto de comprender mas fácilmente estos procedimientos, se va a considerar un restituidor con varios proyectores tipo "*Multiplex*" que se compone de una serie de proyectores suspendidos de una barra metálica apoyada en dos soportes que descansan sobre una mesa de gran solidez como puede observarse en la figura 10.



Figura 10. Instrumento de proyección óptica (Multiplex)

Si colocamos las diapositivas 1 y 2 en los dos primeros proyectores, se podría formar el primer modelo haciendo la orientación relativa de ese par *(Fig. 11)*. Si disponemos de puntos de apoyo (de campo) suficientes (mínimo tres) en ese modelo, podríamos hacer la orientación absoluta también y por tanto sería factible su restitución.

² Estatoscopio, instrumento que permite determinar la diferencia entre alturas de vuelo entre las estaciones de la cámara, lo cual equivale a bz $(\pm 1 \text{ m})$.

³ Barómetros de presión, registran alturas relativas.

⁴ APR (Analytical Profile Reorder), es una combinación de estatoscopio y radar altimétrico que determina alturas absolutas, permitiendo obtener precisiones absolutas de 0.8 m para una altura media de vuelo de 3000 m y de 1,5 a 2 m para alturas de 10000 m.



Figura 11. Orientación del primer modelo.

El problema está ahora en la restitución del modelo siguiente, pues no existe apoyo. Sin embargo sabemos que las diapositivas 1 y 2 están orientadas absolutamente. Si ahora colocamos la diapositivas 3 en el tercer proyector y la orientamos con respecto ("relativamente") al proyector que contiene la diapositivas 2, utilizando en la orientación relativa los elementos del nuevo proyector, la diapositivas 3 quedará *absolutamente nivelada con* respecto al plano de referencia o datum empleado. El nuevo modelo estará orientado en relativa y estará hecha parcialmente la orientación absoluta (nivelación del modelo) pero tendrá una escala arbitrada pues no hemos determinado aún la componente bx de la base (*Fig. 12*)



Figura 12. Orientación del segundo modelo.

Para ello, debemos poner el modelo segundo a la misma escala que tenía el modelo primero. Lo podemos hacer comparando una distancia común (\overline{ac}) a ambos modelos situada en la zona de recubrimiento que existe entre ellos y variando la distancia entre los proyectores con el movimiento bx del que contiene la diapositiva 3 igualaremos las distancias. Una vez que las distancias son iguales $(d_{a_1}^{c_1} = d_{a_2}^{c_2})$ los dos modelos estarán a la misma escala (*Fig. 13*). El modelo segundo tendrá ahora la

orientación correcta y podría ser restituido, pero solo vamos a medir coordenadas instrumentales de los puntos seleccionados (marcados en las diapositivas) en la fase de preparación (que van a ser puntos de apoyo complementarios).



Figura 13. Modelos a idéntica escala.

Podemos colocar la diapositiva 4 en el cuarto proyector y repetir las mismas operaciones de orientación y medir las coordenadas de los puntos seleccionados en este modelo y así sucesivamente hasta llegar al último modelo de la pasada (*Fig. 14*). Tendremos reconstruida toda la pasada en el instrumento de restitución.



Figura 14. Formación de la pasada.

En realidad no serían necesarios los puntos de apoyo (de campo) del primer modelo, pues podemos orientar toda la pasada (conocidas las coordenadas terreno de al menos tres puntos de apoyo adecuadamente distribuidos), como si fuese un solo modelo, por cálculos una vez que la fase instrumental haya concluido.

FOTOGRAMETRÍA III

Debe quedar bien claro, que es necesario que exista un recubrimiento longitudinal entre fotogramas mayor del 50 %, con objeto de que exista una zona de solape común (del 20 % aproximadamente) entre modelos consecutivos dónde situar los puntos de apoyo complementarios cuyas coordenadas terreno vamos a determinar por métodos fotogramétricos.

El fundamento esencial del método de Triangulación Aérea por Pasadas es la transferencia de los elementos de la orientación absoluta de un modelo a otro a lo largo de la pasada. En la práctica el método no es tan sencillo como el descrito, pero los principios básicos son los mismos.

2.5. Fuentes de error en la triangulación aérea.

Las fuentes de error más importantes a considerar en la aerotriangulación son:

- El fotograma.
- El instrumento de restitución.
- La propia observación.

El fotograma está afectado por los siguientes errores:

- Distorsión dimensional (sistemática o uniforme, diferencial sistemática e irregular).
- Falta de planeidad (durante la toma en el instrumento).
- Falta de nitidez.
- Distorsión del objetivo y defectos de orientación interna de la cámara).
- Curvatura terrestre y refracción atmosférica.

El operador genera errores de:

- Precisión en el posado del índice.
- Precisión en la eliminación de paralajes.
- Errores groseros (pe. equivocaciones en la identificación de puntos)

2.6. Aplicaciones de la triangulación aérea

El desarrollo de la triangulación aérea fue debido a la necesidad de disminuir la dependencia de la fotogrametría de la topografía, con el fin de agilizar las ejecuciones cartográficas reduciendo las necesidades de control terrestre, siendo esta su principal aplicación.

A continuación se exponen las aplicaciones cartográficas y otras que son muy interesantes.

Cartografía.

- La fase de orientación absoluta precisa de la determinación de cuatro puntos de apoyo por par de fotografías que situándolo en las zonas comunes entre fotografías consecutivas a lo largo de las pasadas y entre pasadas adyacentes este número se reduce a 1.5 puntos por par, cuando el bloque es grande.
- Mediante la aplicación de los métodos de triangulación aérea se reduce el número de puntos de control necesarios y también la dependencia de la distribución del mismo con la consiguiente agilización de los mismos.
- Al realizar la orientación absoluta el operador necesita identificar los puntos de apoyo mediante el croquis realizado en el campo.

- Mediante la triangulación aérea estos puntos están materializados en las diapositivas mediante una marca o son puntos preseñalizados.
- Los parámetros de orientación absoluta determinados durante la ejecución de la triangulación aérea pueden ser introducidos en los micrómetros de los analógicos, minimizando el tiempo de ejecución de esta fase.
- En instrumentos analíticos estos parámetros son almacenados, de forma que para orientar un modelo posteriormente solamente sería necesario realizar la orientación interna y recuperar del fichero los valores correspondientes.
- Como se ha visto la aplicación de la triangulación aérea en las ejecuciones cartográficas no solo se reduce a la reducción del número de puntos de control necesarios, que justificaría su empleo, sino que también facilita una serie de tareas durante la orientación absoluta.

Modelos digitales del terreno (MDT).

- La adquisición de datos para mapas digitales puede hacerse durante la triangulación aérea especialmente para modelos digitales altimétricos.
- Estos son un producto independiente por "si" mismos para aplicaciones posteriores en proyectos de ingeniería. Son básicos para un plan nacional de ortofotografía y rectificación de imágenes escáner desde el espacio.
- A partir de ellos se puede realizar el curvado automático sustituyéndolo por el convencional.

Densificación de redes

- La determinación fotogramétrica de las coordenadas de un punto ha alcanzado un nivel de precisión que hace posible su aplicación a problemas geodésicos, en particular a la determinación de redes de orden inferior (4° orden) a partir de las de orden superior.
- Con puntos preseñalizados en bloques de moderado tamaño bien controlados la precisión esta establecida en 10 micras en placa y es casi independiente del tamaño del bloque. Así la precisión de los puntos en el terreno depende fundamentalmente de la escala de la foto y la señalización de los puntos.
- Esta densificación de redes puede ser aplicada a la determinación de bases de replanteo con fines catastrales o de ingeniería civil.
- Cualquier otro tipo de trabajo que precise la obtención de una serie de puntos con gran precisión como obtención de perfiles longitudinales o transversales de elementos lineales (ríos, carreteras, ferrocarriles, etc.), enlace altimétrico de embalses y zonas de regadío dentro de una misma cuenca, control de movimiento de taludes, etc, puede ser realizado mediante ejecución de métodos de triangulación aérea analítica.

Bibliografía

- American Society of Photogrammetry. Manual of Photogrammetry, ASPRS, Cuarta Edición (1980). ISBN 0-937294-01-2.
- Burnside, C.D., Mapping from Aerial Photographs, Collins Professional, Londres, Segunda Edición (1979). ISBN 0-00-383036-5.
- Clavo, D., Fotogrametría II, Universidad Politécnica de Madrid, EUITT.
- Curso sobre técnicas fotogramétricas y sus aplicaciones, CEDEX (MOPTMA), Madrid (1994).
- Gómez, A., Fotogrametría Analítica Universidad Politécnica de Madrid, ETSIA.
- Ghosh, S.K., Phototriangulation, Lexingtong Books, Londres (1975). ISBN 0-669-98210-5.
- Ghosh, S.K., Analytical Photogrammetry, Pergamon Press, Oxford (1988), 2ª Edición. ISBN 0-

08-036103-X.

- Heras, A.E., Apuntes de FotogrametríaII, Universidad Politécnica de Madrid, EUITT.
- Wolf, P.R. y Dewitt, B.A, Elements of Photogrammetry with Applications in GIS, McGraw-Hill, EEUU, Tercera Edición (2000).ISBN 0-07-292454-3.

TEMA 3

AEROTRIANGULACIÓN POR PASADAS

3.1. Introducción

3.2. Correcciones a efectuar a las coordenadas

3.3. Orientación relativa

3.4. Formación analítica de la pasada

3.4.1. Conexión de modelos por medio de una transformación tridimensional

3.4.2. Conexión de modelos a partir de los datos proporcionados en la fase de orientación relativa

3.4.2.1. Matriz de rotación para el modelo $n = R_n$

3.4.2.2. Factor de escala λ_{II} para el modelo n

3.4.2.3. Desplazamientos *Tx_n, Ty_n, Tz_n* para el modelo n

3.5. Ajuste de la pasada al sistema terreno (orientación absoluta)

3.6. Compensación de pasadas

3.7. Formación y ajustes de bloques a partir de pasadas

3.7.1. Ajuste altimétrico

3.7.2. Ajuste planimétrico

Bibliografía

3.1. Introducción

La aerotriangulación por pasadas tiene su origen en la utilización de instrumentos de restitución analógicos (*tipo Multiplex y Universales*) en los cuales se realizaba la formación analógica del modelo estereoscópico usando solamente elementos del proyector nuevo, es decir, solo se utilizaban los elementos de orientación relativa donde se introdujese la nueva diapositiva. El proyector antiguo permanecía intacto. La formación de la pasada se realizaba en el instrumento de restitución.

Como resultado se obtenía las coordenadas instrumentales de cada uno de los puntos seleccionados previamente en la fase de preparación de la aerotriangulación, referidos generalmente al origen del primer modelo. Estos puntos eran posteriormente transformados al sistema terreno y compensados, siendo estos los que se utilizaban para realizar la fase de orientación absoluta antes de la restitución de los modelos.

Estos procedimientos son de interés histórico, habiendo dado paso a procedimientos analíticos. En este capítulo y en sucesivos se estudiarán solamente los procedimientos de aerotriangulación analítica.

Tanto en los procedimientos analógicos como en los analíticos tienen lugar una serie de fases:

- Orientación relativa de cada modelo.
- Conexión de modelos adyacentes para lograr la formación de la pasada.
- Ajuste o compensación de la pasada al apoyo de campo.

La diferencia de los métodos analíticos frente a los analógicos es que la entrada de datos consiste en coordenadas imagen corregidas, medidas con la máxima precisión (coordenadas comparador), de todos aquellos puntos seleccionados en la fase de preparación. A partir de estas coordenadas y con los datos de la cámara se realizará la orientación relativa analítica.

Existen diferentes métodos desarrollados, pero todos consisten en escribir las ecuaciones que relacionan los elementos de la orientación relativa con las constantes de la cámara y las coordenadas imagen. Resolviendo el sistema de ecuaciones formado se obtendrán los parámetros de la orientación relativa y a partir de estos, las coordenadas modelo.

En la siguiente figura se muestran cada una de las diferentes fases del proceso.



Figura 1. Fases de aerotriangulación analítica por pasadas.

El procedimiento analítico es mucho más preciso que los analógicos ya que permiten eliminar de forma más efectiva los errores sistemáticos, tales como la falta de planeidad de la película, distorsiones del objetivo de la cámara, esfericidad terrestre, ...etc., no existen limitaciones mecánicas, los errores provienen solamente de la lectura del comparador.



Figura 2. Diagrama de flujo de las diferentes posibilidades de la aerotriangulación analítica.

3.2. Correcciones a efectuar a las coordenadas

Transformación del sistema comparador al sistema de las marcas fiduciales y corrección de la deformación de la película.

A partir de las coordenadas fiduciales procedentes del certificado de calibración de la cámara y las correspondientes ecuaciones de transformación que corrigen la deformación de la película al mismo tiempo que transforman las coordenadas al sistema fiducial.



Figura 3. Sistema comparador y fiducial.

Como ya se estudió en Fotogrametría II *(Orientación analítica interna)*, podemos utilizar una transformación bidimensional afín para eliminar las deformaciones lineales de la película tanto en dirección de la *x* como en *y*, teniendo en este caso que resolver seis incógnitas.

$$x_F = a x_K - b y_K + T_x$$
$$y_F = c x_K + d y_K + T_y$$

Pueden utilizarse las ecuaciones de la transformación bidimensional proyectiva, siendo en este caso ocho las incógnitas a resolver. Se corregirán además de los errores de la deformación de la película en cualquier dirección del plano, los errores instrumentales del comparador.

$$x_{F} = \frac{a_{1} x_{C} + b_{1} y_{C} + c_{1}}{a_{3} x_{C} + b_{3} y_{C} + 1} \qquad \qquad y_{F} = \frac{a_{2} x_{C} + b_{2} y_{C} + c_{2}}{a_{3} x_{C} + b_{3} y_{C} + 1}$$

Corrección por desplazamiento del punto principal respecto a fiducial.

Una vez que se han referido las coordenadas al sistema de las marcas fiduciales, habrá que trasladar el origen del sistema fiducial al del punto principal (ω). Conociendo dicho desplazamiento (certificado de calibración) puede establecerse fácilmente (*Fig. 3*):

$$x_{T} = x_{F} + x_{\omega}$$
$$y_{T} = y_{F} + y_{\omega}$$

Corrección de distorsión de la lente del objetivo.

Las distorsiones introducidas por la lente producen desviaciones en el rayo al atravesarla, desviando las posiciones ideales del haz sobre la imagen (*Fig. 4*).



Figura 4. Efecto de la distorsión de la lente

Existen tres tipos de distorsión en el ensamblaje de una lente, la distorsión radial simétrica, la distorsión radial asimétrica y la distorsión tangencial. La dos últimas son en la mayoría de los casos tan pequeñas que no se toman en cuenta a la hora de la corrección.

La distorsión radial simétrica es la que se especifica en el certificado de calibración de la cámara, en función de la distancia radial "r" y de la distorsión " Δr ". Para determinar la distorsión radial simétrica

se recurre generalmente a la utilización mediante el método de aproximación a un polinomio de la distorsión radial de la lente. Este método consiste en aproximar la curva de distorsión a un polinomio del tipo:

$$\Delta r = a_1 r + a_2 r^3 + a_3 r^5 + a_4 r^7$$
$$(r = \sqrt{x_T^2 + y_T^2})$$

Los coeficientes a_1, a_2, a_3, a_4 definen la forma de la curva.

Una vez determinado el valor de la distorsión para un determinado punto hay que proceder a transformar dicho valor en la corrección de las coordenadas, a partir de las expresiones:

$$x' = x_{T} + \Delta x_{T} = \frac{\Delta r x_{T}}{r} + x_{T}$$
$$y' = y_{T} + \Delta y_{T} = \frac{\Delta r y_{T}}{r} + y_{T}$$

Corrección refracción y esfericidad terrestre

La refracción Atmosférica hace que la imagen de los puntos aparezca en los fotogramas más alejada del punto principal de lo que en realidad le corresponde, siendo por tanto una distorsión radial análoga a la de distorsión. La esfericidad terrestre produce una distorsión radial negativa (acerca los puntos radialmente), es más importante cuanto más cerca de los bordes del fotograma se midan coordenadas.



Figura 5. Efecto de la refracción atmosférica (izquierda) y de la esfericidad terrestre (derecha).

En la figura 5 (izquierda) la imagen de un punto P se ve desplazada a p' en vez de a p, es decir se ha desplazado una magnitud $\overline{pp'}$, por tanto la corrección del punto sería aplicarle un desplazamiento C_r en sentido inverso cuyo valor puede obtenerse a partir de la expresión:

$$C_r = \frac{x_T^2 + y_T^2 + c^2}{c} d\theta$$

Para calcular el valor de d θ existen tablas en función de la altitud de vuelo y de las condiciones

atmosféricas. También puede obtenerse partiendo de condiciones atmosféricas standard establecidas por la Organización Internacional de Aviación Civil (ICAO) y tomas verticales:

$$\begin{split} C_{r} &= \left(c^{2} + x_{T}^{2} + y_{T}^{2}\right) \left(\frac{\sqrt{x_{T}^{2} + y_{T}^{2}}}{c^{2}}\right) d\theta_{o} \\ d\theta_{o} &= \frac{T}{636620} - \frac{Q_{o} - Q_{p}}{Z_{o} - Z_{p}} \\ T &= 178.46 - 17.14 \, Z_{o} + 0.6296 \, Z_{o}^{2} - 0.01071 \, Z_{o}^{3} + 0.000077 \, Z_{o}^{4} \\ Q_{o} &= \left(2803.11 \, Z_{o} - 134.629 \, Z_{o}^{2} + 3.2966 \, Z_{o}^{3} - 0.04205 \, Z_{o}^{4} + 0.000242 \, Z_{o}^{5}\right) 10^{-7} \\ Q_{o} &= \left(2803.11 \, Z_{p} - 134.629 \, Z_{p}^{2} + 3.2966 \, Z_{p}^{3} - 0.04205 \, Z_{p}^{4} + 0.000242 \, Z_{p}^{5}\right) 10^{-7} \end{split}$$

Siendo :

c = distancia principal de la cámara métrica.

 Z_0 = altura de vuelo sobre el nivel del mar en Km.

 Z_P = altura del terreno sobre el nivel del mar en km.

 x_T , y_T = coordenadas transformadas en mm.

La expresión que permite determinar la corrección de esfericidad terrestre es:

$$C_e = \Delta r = \frac{Hr^3}{2Rc^2} = \frac{H}{2Rc^2} \left[\sqrt{(X_T^2 + Y_T^2)^3} \right]$$

3.3. Orientación relativa

La orientación relativa se habrá realizado correctamente si los rayos conjugados intersectan para un mínimo de cinco puntos, correctamente distribuidos sobre el modelo según Von Gruber. Básicamente la orientación relativa analítica consiste en la medida de coordenadas imagen de un número mínimo de puntos de dos tomas consecutivas y aplicación a cada uno de estos de la condición de coplaneidad, con lo cual los dos rayos homólogos intersectan en P (*Fig. 6*).



Figura 6. Sistema con origen en el centro de proyección izquierdo.

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \beta y & \beta z \\ \overline{\mathbf{X}_1} & \overline{\mathbf{Y}_1} & \overline{\mathbf{Z}_1} \\ \overline{\mathbf{X}_2} & \overline{\mathbf{Y}_2} & \overline{\mathbf{Z}_2} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

siendo respectivamente bx, by, bz las componentes de la base y las coordenadas:

$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{X}}_1 \\ \overline{\mathbf{y}}_1 \\ \overline{\mathbf{Z}}_1 \end{bmatrix} = $	$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{y}' \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{X}}_2 \\ \overline{\mathbf{y}}_2 \\ \overline{\mathbf{Z}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}'' \\ \mathbf{y}'' \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}$
$ \overline{\overline{X}}_{1} \\ \overline{\overline{Y}}_{1} \\ \overline{\overline{Z}}_{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{d} & a_{12}^{d} \\ a_{21}^{d} & a_{22}^{d} \\ a_{31}^{d} & a_{32}^{d} \end{bmatrix} $	$ \begin{array}{c} a_{13}^{d} \\ a_{23}^{d} \\ a_{33}^{d} \end{array} \right] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ c \end{bmatrix} $	$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{X}}_{2} \\ \overline{\mathbf{y}}_{2} \\ \overline{\mathbf{Z}}_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11}^{d} & \mathbf{a}_{12}^{d} & \mathbf{a}_{13}^{d} \\ \mathbf{a}_{21}^{d} & \mathbf{a}_{22}^{d} & \mathbf{a}_{23}^{d} \\ \mathbf{a}_{31}^{d} & \mathbf{a}_{32}^{d} & \mathbf{a}_{33}^{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}'' \\ \mathbf{y}'' \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}$

Como ya se explicó estos procedimientos analíticos en Fotogrametría II (Orientación relativa analítica), es necesario linealizar la ecuación vista anteriormente y resolver el sistema de ecuaciones mediante un procedimiento iterativo, para determinar los parámetros de la orientación relativa analítica.

También puede deducirse los parámetros de la orientación relativa a partir de las ecuaciones de colinealidad, haciendo que las coordenadas del centro de protección izquierdo O₁ (X_{O1}, Y_{O1}, Z_{O1}) tengan unos valores determinados, por ejemplo (0, 0, 0) y los giros de la placa izquierda sean cero (ω_1 , φ_1 , κ_1) (*Fig. 7*). En este caso, los parámetros a obtener quedarán reducidos a cinco, los tres giros de la placa derecha y las componentes de la base $Y_{O_1} = by$, $Z_{O_1} = bz$.



Figura 7. Sistema con origen en el centro de proyección izquierdo y placa izquierda paralela al sistema de referencia.

$$x = -c \frac{m_{11}(X - X_{o}) + m_{12}(Y - Y_{o}) + m_{13}(Z - Z_{o})}{m_{31}(X - X_{o}) + m_{32}(Y - Y_{o}) + m_{33}(Z - Z_{o})}$$
$$y = -c \frac{m_{21}(X - X_{o}) + m_{22}(Y - Y_{o}) + m_{23}(Z - Z_{o})}{m_{31}(X - X_{o}) + m_{32}(Y - Y_{o}) + m_{33}(Z - Z_{o})}$$

Al igual que en la ecuación de coplaneidad, para resolver estas es necesario linealizar las ecuaciones y proceder a determinar los parámetros de la orientación por medio de un proceso iterativo de cálculo, como ya se trato este tema en anterior asignatura.

Una vez que se hallan determinado los parámetros de la orientación relativa pueden obtenerse sin ningún tipo de dificultad las coordenadas terreno de los puntos que van a intervenir en el proceso de aerotriangulación.

3.4. Formación analítica de la pasada

Una vez realizada la orientación relativa y determinadas las coordenadas modelo de todos los puntos de paso y de apoyo de cada uno de los modelos que forman la pasada, las cuales serán independientes para cada uno de ellos, tendremos que referir todas a un mismo sistema de coordenadas uniforme para toda la pasada (*Fig. 8 y 9*).



Figura 8. Modelos orientados relativamente con sus respectivos sistemas de coordenadas independientes.



Figura 9. Formación de la pasada.

Para enlazar cada uno de los modelos al sistema de la pasada es necesario:

- Una rotación (R).
- Un factor de escala (λ).
- Tres traslaciones (*Tx*, *Ty*, *Tz*).

Los modelos pueden enlazarse para formar la pasada través de una transformación tridimensional de coordenadas utilizando los puntos comunes a dos modelos consecutivos o bien por medio de un procedimiento operacional basándonos en los datos proporcionados para cada uno de los modelos de la pasada, por los parámetros calculados en la orientación relativa analítica de cada uno de ellos.

3.4.1. Conexión de modelos por medio de una transformación tridimensional

Una transformación conforme tridimensional de coordenadas comprende la conversión de un sistema tridimensional a otro. La expresión general de la transformación viene dada por:

X]	a ₁₁	a ₁₂	a ₁₃	[x]	T_x		$\begin{bmatrix} x \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} T_x \end{bmatrix}$
Y	$=\lambda$	a ₂₁	a ₂₂	a ₂₃	y +	T _y	$=\lambda$ [R]	у	$+ T_y$
		a ₃₁	a ₃₂	a ₃₃	[z]	T _z		z	$\begin{bmatrix} T_z \end{bmatrix}$

donde:

- λ , representa el factor de escala.
- T_X, T_Y, T_Z, son los desplazamientos.
- $a_{11}, a_{12},...,a_{33}$, son los coeficientes de la matriz de rotación *R*, los cuales vienen dados en función de los senos y cosenos de los ángulos de rotación (Ω, Φ, K).

Para conseguir formar la pasada se utilizarán los puntos los puntos de paso comunes a modelos adyacentes, aplicando una transformación tridimensional conforme de coordenadas para enlazar cada modelo sucesivo con su modelo previo. Para conseguir una geometría sólida en las transformaciones, las coordenadas de los centros de proyección se medirán en cada modelo independiente y serán incluidos en la transformación como puntos comunes. El centro de proyección de derecho del modelo formado por 1-2 (O_2), por ejemplo es el mismo punto que el centro de proyección del modelo 2-3. Para transformar el modelo 2-3 al modelo 1-2, las coordenadas de los puntos comunes 4, 5, 6 y O_2 del modelo 2-3 se hacen coincidir con sus correspondientes coordenadas del modelo 1-2. Una vez que los parámetros de esta transformación se han calculado se aplican a las coordenadas de los puntos 7, 8, 9 y O_3 en el sistema del modelo 2-3 para obtener sus coordenadas en el sistema modelo 1-2. Estos puntos se convierten en control (sistema de referencia) para la transformación de los puntos del modelo 3-4. Aplicando sucesivamente transformaciones de coordenadas se va formando una banda continua de modelos (formación de la pasada), como aparece en la figura 9. La banda de modelos así construida está referida al sistema de coordenadas del primer modelo constituido por 1-2.

3.4.2. Conexión de modelos a partir de los datos proporcionados en la fase de orientación relativa

En este caso se van a llevar a cabo para conectar los modelos básicamente tres pasos correspondientes a la rotación, el cambio de escala y los desplazamiento.

Asumiendo que se ha realizado la orientación relativa analítica (p. e. condición de coplaneidad por empalme de fotos consecutivas – método del proyector derecho-), se han determinado las coordenadas de cada uno de los modelos con origen en el centro de proyección izquierdo y la matriz de rotación correspondiente al haz izquierdo de cada modelo es igual a la matriz unidad (R=I; $\omega_I = \varphi_I = \kappa_I = 0$), estaríamos en la situación siguiente (*Fig. 10*):



Figura 10. Modelos orientados analíticamente por empalme de fotos consecutivas.

3.4.2.1. Matriz de rotación para el modelo $n = R_n$.

Asumiendo que la situación de cada uno de los modelos una vez que se han calculado las coordenadas es la mostrada en la figura 11, siendo R_n la rotación (matriz de rotación) del haz del modelo en cuestión.



Si asumimos que el origen del sistema pasada coincide con el origen de coordenadas del primer modelo, este permanecerá en la misma posición relativa.

$$\mathbf{r}_{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

donde r_1 indica la matriz de rotación del primer modelo. Al tomar como origen de coordenadas pasada el centro de proyección izquierdo del primer modelo, la matriz de rotación es igual a la matriz unidad $(r_1 = I)$.

Si se gira el segundo modelo de tal manera que el haz común (en este caso O_2) tenga la misma rotación que el del primer modelo, estaremos en la situación descrita en la figura 12.



Figura 12. Giro del haz común del segundo modelo (O2) respecto al primero.

Si a continuación se gira el tercer modelo de tal manera que el haz común con el segundo modelo (2') tenga la misma rotación, estaremos en la situación descrita en la figura 13.



Figura 13. Giro del haz común del tercer modelo (O₃) respecto al segundo en el sistema pasada.

Si se considera el caso general en el que todos los modelos son referidos al sistema de la pasada (*Fig. 14*).



Figura 14. Modelos referidos al sistema de la pasada.

 $\begin{aligned} \mathbf{r}_{1} &= \mathbf{R}_{1} = \mathbf{I} \\ \mathbf{r}_{2} &= \mathbf{R}_{1} \ \mathbf{R}_{2} = \mathbf{r}_{1} \ \mathbf{R}_{2} \\ \mathbf{r}_{3} &= \mathbf{R}_{1} \ \mathbf{R}_{2} \ \mathbf{R}_{3} = \mathbf{r}_{2} \ \mathbf{R}_{3} \\ \mathbf{r}_{4} &= \mathbf{R}_{1} \ \mathbf{R}_{2} \ \mathbf{R}_{3} \ \mathbf{R}_{4} = \mathbf{r}_{3} \ \mathbf{R}_{4} \\ & \cdot \\ & \mathbf{r}_{n} &= \mathbf{R}_{1} \ \mathbf{R}_{2} \ \mathbf{R}_{3} \dots \dots \mathbf{R}_{n} = \mathbf{r}_{n-1} \ \mathbf{R}_{n} \end{aligned}$

En la expresión anterior se ha considerado que r es la rotación del modelo y R la del haz. $R_I = I$ ya que se ha tomado como origen de la pasada coincidente con el haz izquierdo del primer modelo. El valor de R_I puede ser otro, por ejemplo el obtenido a partir de la orientación absoluta del primer modelo con ayuda de puntos de apoyo, o en el caso de haber efectuado la orientación relativa por fotogramas independientes.

3.4.2.2. Factor de escala λ_n para el modelo n

Determinadas las coordenadas modelo de cada uno de los puntos de interés (puntos de apoyo, centros de proyección, puntos de paso y enlace) en cada modelo antes de la formación de la pasada, puede determinarse fácilmente el elemento de transmisión de escala $\Delta \lambda_{n+1}^n$ entre dos modelos consecutivos *n* y *n*+1, a partir de los factores de escalas λ_n y λ_{n+1} de los puntos comunes a ambos modelos (*Fig. 15*).



Figura 15. Ajuste de escala entre modelos consecutivos.

Puede obtenerse fácilmente el factor de escala considerando el punto P, el cual aparece en ambos modelos $n \ge n + 1$.

Las coordenadas modelo para el punto P se habrán calculado en el modelo n a partir del factor de escala de este punto.

$$\lambda_n = \frac{O_{n+1} p_n}{O_{n+1} P_n} = \frac{D_n}{d}$$

En el modelo n+1 se habrán calculado las coordenadas modelo del punto P con la ayuda del factor de escala de ese punto.

$$\lambda_{n+1} = \frac{O_{n+1} p_{n+1}}{O_{n+1} P_{n+1}} = \frac{D_{n+1}}{d}$$

Para corregir el factor de escala del modelo n+1 para que se corresponda con la del modelo n tendremos que conseguir que la distancia del centro de proyección al punto del modelo ha de ser idénticas en ambos.

$$D_{n} = \Delta \lambda D_{n+1}$$
$$\Delta \lambda_{n+1}^{n} = \frac{D_{n}}{D_{n+1}} = \frac{D_{n}}{D_{n+1}} = \frac{\lambda_{n}}{\lambda_{n+1}}$$

La figura 16 muestra cada modelo individualmente y el factor de escala que los relaciona.



Figura 16. Transferencia de escala entre modelos adyacentes de la pasada.

En la figura 17 se representa la pasada una vez aplicadas las sucesivas correcciones de escala.



Figura 17. Pasada ajustada en escala.

$$\begin{split} \lambda_{\textcircled{1}} &= \lambda_{1} \\ \lambda_{\textcircled{2}} &= \lambda_{1} \Delta \lambda_{1}^{2} = \lambda_{\textcircled{1}} \Delta \lambda_{1}^{2} \\ \lambda_{\textcircled{3}} &= \lambda_{1} \Delta \lambda_{1}^{2} \Delta \lambda_{2}^{3} = \lambda_{\textcircled{2}} \Delta \lambda_{2}^{3} \\ \lambda_{\textcircled{4}} &= \lambda_{1} \Delta \lambda_{1}^{2} \Delta \lambda_{2}^{3} \Delta \lambda_{3}^{4} = \lambda_{\textcircled{3}} \Delta \lambda_{3}^{4} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_{(n)} &= \lambda_{1} \Delta \lambda_{1}^{2} \Delta \lambda_{2}^{3} \dots \Delta \lambda_{n-1}^{n} = \lambda_{(n-1)} \lambda_{n-1}^{n} \end{split}$$

Si la pasada se coloca a escala del primer modelo $\lambda_1 = 1$. Puede también introducirse un valor para λ_1 obtenido en la orientación absoluta (ajuste de la escala) del primer modelo a partir de los puntos de apoyos en el caso que los hubiera.

La transmisión $\Delta \lambda_{n+1}^n$ de escala se puede determinar tantas veces como puntos tengamos en el solape común a ambos modelos.

3.4.2.3. Desplazamientos Tx_n , Ty_n , Tz_n para el modelo n

Se van a determinar los desplazamientos del origen de cada uno de los modelos respecto al origen del modelo anterior.

En la figura 18 se representan cada uno de los modelos antes de la formación de la pasada.



Figura 18. Modelos antes de la formación de la pasada.

Una vez que se hayan corregido cada uno de los modelos de rotación, escala y desplazamientos, estos presentarán la forma siguiente (*Fig. 19*).



Figura 19. Modelos corregidos de rotación, escala y desplazamiento.

Desplazamiento para el modelo 1:

$$Tx_1 = Tx_{O_1}$$
$$Ty_1 = Ty_{O_1}$$
$$Tz_1 = Tz_{O_1}$$

 $Tx_{O_1} = Ty_{O_1} = Tz_{O_1} = 0$ en el caso de que ser el origen de la pasada el centro de proyección izquierdo del primer modelo (O_I) o e en el caso de haber orientado absolutamente el primer modelo.

Desplazamiento para el modelo 2:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}\mathbf{x}_{2} \\ \mathbf{T}\mathbf{y}_{2} \\ \mathbf{T}\mathbf{z}_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}\mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{T}\mathbf{y}_{1} \\ \mathbf{T}\mathbf{z}_{1} \end{bmatrix} + \lambda_{1} \begin{bmatrix} \mathbf{b}\mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{b}\mathbf{y}_{1} \\ \mathbf{b}\mathbf{z}_{1} \end{bmatrix}$$

Desplazamiento para el modelo 3:

$$\begin{bmatrix} Tx_3 \\ Ty_3 \\ Tz_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Tx_1 \\ Ty_1 \\ Tz_1 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} bx_1 \\ by_1 \\ bz_1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} bx_2 \\ by_2 \\ bz_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Tx_2 \\ Ty_2 \\ Tz_2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} bx_2 \\ by_2 \\ bz_2 \end{bmatrix}$$

Desplazamiento para el modelo n:

$$\begin{bmatrix} Tx_n \\ Ty_n \\ Tz_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Tx_1 \\ Ty_1 \\ Tz_1 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} bx_1 \\ by_1 \\ bz_1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} bx_2 \\ by_2 \\ bz_2 \end{bmatrix} + \dots + \lambda_{n-1} \begin{bmatrix} bx_{n-1} \\ by_{n-1} \\ bz_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Tx_{n-1} \\ Ty_{n-1} \\ Tz_{n-1} \end{bmatrix} + \lambda_{n-1} \begin{bmatrix} bx_{n-1} \\ by_{n-1} \\ bz_{n-1} \end{bmatrix}$$

3.5. Ajuste de la pasada al sistema terreno (orientación absoluta)

Una vez formada la pasada modelo, se ajustará numéricamente al sistema de coordenadas terreno, usando todos los puntos de control posibles. Si la pasada es corta, por ejemplo 4 modelos, este ajuste se hará mediante una transformación tridimensional conforme de coordenadas, la cual requiere un mínimo de dos puntos de apoyo horizontales y de tres verticales presentes en la pasada. Es deseable un mayor número del mínimo pues añade estabilidad y redundancia a la solución. Si la pasada es larga es preferible utilizar un ajuste de polinomios para la transformación de sistema modelo al terreno.

Debido a la naturaleza de la formación secuencial de pasadas, casualmente los errores se acumularán a lo largo de la pasada. Con frecuencia esta acumulación de error se manifestará de una manera sistemática de forma no lineal. Este efecto *(se muestra en la Fig. 20)* puede ser significativo particularmente en largas pasadas.

La figura 20-a representa una pasada de modelos, constituida por 7 modelos contiguos de una línea de vuelo simple. En la figura existen suficientes puntos de control terrestre en el modelo primero para la orientación absoluta al sistema terreno. Los puntos de control terrestre restantes (en los modelos 4 y 7) pueden ser usados como puntos de comprobación para detectar errores acumulados a lo largo de la pasada.

La figura 20-b muestra un gráfico de las discrepancias existentes entre las coordenadas terreno y

modelo para los puntos de comprobación (situados en los modelos 4 y 7) mediante una función de coordenadas X a lo largo de la pasada. Excepto para el control terrestre del primer modelo, el cual se usa para orientar absolutamente la pasada, existen discrepancias entre las posiciones modelo (coordenadas terreno obtenidas a partir de las coordenadas modelo de la pasada) de los puntos de control horizontales y verticales y sus correspondientes posiciones medidas en campo. Estas diferencias de coordenadas hacen que aparezcan deformaciones en la pasada. El suavizado de las curvas se adapta a las discrepancias como muestra la figura.



Figura 20. (a) Pasada constituida por siete modelos sobre las que se han distribuido una serie de puntos de apoyo. (b) Curvas indicativas de acumulación de errores en X, Y, Z a lo largo de la pasada.

Las características de las deformaciones de una pasada son de una magnitud considerable, aparecen como sistemáticas y el modo de deformación no es completamente sistemático, ya que aparecen irregularidades menores. Por lo general los errores que intervienen en la deformación de una pasada son:

- Error de curvatura (en el caso de no ser subsanado en la fase de corrección de las coordenadas, apartado 2).
- Defectos en el ajuste del primer modelo (pueden considerare irrelevantes en el primer modelo, pero no en los sucesivos modelos).
- Errores en las orientaciones relativas, los cuales tienen naturalezas diferentes.
 - Errores sistemáticos, son los que afecta de forma idéntica a todos los modelos. Son muy importante porque sobrepasan enseguida las tolerancias. Pueden ser debidos a diversas causas, como errores en el proceso de orientación interna.

- Errores accidentales, consecuencia de una incorrecta eliminación de la paralaje. La magnitud es función de la calidad óptica del sistema de observación del instrumento, de la agudeza visual del operador,...etc.
- Errores de transmisión de escala.
- Errores de la proyección cartográfica.

La composición de todos estos errores provoca grandes deformaciones en la formación de la pasada. La propagación de estos errores y sus efectos sobre las coordenadas medidas han sido objeto de numerosos estudios. Frutos de estas investigaciones son las expresiones polinómicas utilizadas normalmente en fotogrametría para la compensación de la pasada o bloque de pasadas, que se verán en el siguiente apartado.

Si se distribuye a lo largo de toda la pasada un control suficiente, se puede usar una transformación tridimensional polinómica en lugar de una transformación tridimensional conforme, para realizar orientación absoluta y obtener las coordenadas correctas de los puntos de paso.

Esta transformación polinómica produce gran precisión en los errores sistemáticos que se producen a lo largo de la pasada. La mayoría de los polinomios usados para el ajuste de la formación de pasadas por aerotriangulación son variaciones de las siguientes ecuaciones:

$$X = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 + a_6 x^3 + a_7 x^2 y + a_8 xy^2 + a_9 y^3$$

$$Y = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy + b_5 y^2 + b_6 x^3 + b_7 x^2 y + b_8 xy^2 + b_9 y^3$$

$$Z = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 x^2 + c_4 xy + c_5 y^2 + c_6 x^3 + c_7 x^2 y + c_8 xy^2 + c_9 y^3$$

En estas ecuaciones X, Y, Z son las coordenadas terreno transformadas, x e y son las coordenadas modelo de la pasada; y a_i , b_i , c_i son los coeficientes que definen la forma de las curvas de error de los polinomios.

Estas ecuaciones contienen 30 coeficientes desconocidos. Cada punto de control tridimensional proporciona 3 ecuaciones polinomiales, y además debemos tener en cuenta que para tener una solución exacta necesitaremos 10 puntos de control tridimensionales. Es importante que los puntos de control estén en el perímetro pues de lo contrario tendríamos excesivas correcciones. Como muestra la figura 20-b los errores en X, Y y Z son función principalmente de la distancia lineal *(coordenada X)* del punto a lo largo de la pasada. La naturaleza de los errores de propagación a lo largo de la pasada en aerotriangulación es tal que esas discrepancias en coordenadas son un poco relativas a las posiciones Y de los puntos de la pasada. Dependiendo de la complejidad de la distorsión, ciertos términos se pueden eliminar de las ecuaciones anteriores si no se consideran significativos. Esto incrementa la redundancia en la transformación la cual generalmente consigue resultados más precisos.

3.6. Compensación de pasadas.

Como se trató anteriormente las deformaciones de una pasada pueden considerarse debidas a las acumulaciones de errores sistemáticos y accidentales.

La situación de una pasada antes de la compensación se refleja en la figura 21. El problema consiste en determinar para un punto de enlace de la pasada, la corrección adecuada, aplicando un procedimiento de interpolación, en relación con las propiedades generales que gobiernan las propagación de errores. Puede afirmarse que una superficie apropiada de corrección expresa lo mejor posible la deformación real de la pasada, dado que la escasa información que se posee es función únicamente de unos pocos puntos de apoyos.



Figura 21. Representación de la deformación en la superficie de la pasada por errores en Y.

En la compensación de pasadas con polinomios el punto más importante a tener en cuenta es el de la elección de los polinomios, ya que serán elegidos teniendo en cuenta el tipo de deformación, número de puntos de apoyo de campo así como el número de parámetros o coeficientes.

Las correcciones ΔX , ΔY , ΔZ a los puntos aerotriangulados se determinan numéricamente en función de las coordenadas x, y, z. Se suelen utilizar polinomios de segundo y tercer grado generalmente.

En terreno llano las expresiones a utilizar serán:

$$\Delta X = a_0 + a_1 x - b_1 y + a_2 x^2 - 2b_2 xy$$

$$\Delta Y = b_0 + b_1 x + a_1 y + b_2 x^2 + 2a_2 xy$$

$$\Delta Z = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 x^2 + c_4 xy$$

en las cuales ΔX y ΔY están correlacionados y ΔZ se considera independiente de ΔX y ΔY .

- ΔX, ΔY, ΔZ son las diferencias entre las coordenadas de la pasada transformadas y las de los puntos de apoyo (ΔX=X₀-X_P, ΔY=Y₀-Y_P, ΔZ=Z₀-Z_P)
- x, y, z son las coordenadas de la pasada.

Otros polinomios utilizados son:

Vermier:

$$\Delta X = a_0 + a_1 x - b_1 y + c_1 z + a_2 x^2 - 2b_2 xy + 2c_2 xz$$

$$\Delta Y = b_0 + b_1 x + a_1 y - d_1 z + b_2 x^2 + 2a_2 xy - 2d_2 xz$$

$$\Delta Z = c_0 - c_1 x + d_1 y + a_1 z - c_2 x^2 + 2d_2 xy + 2a_2 xz$$

Shut:

$$\Delta X = a_0 + a_1 x - b_1 y + a_2 (x^2 - y^2) - 2b_2 xy$$

$$\Delta Y = b_0 + b_1 x + a_1 y + b_2 (x^2 - y^2) + 2a_2 xy$$

Con las expresiones anteriormente indicadas se forma un sistema de ecuaciones, donde se conocen los términos ΔX , ΔY , ΔZ y las coordenadas x, y z de la pasada, los cuales nos servirá para determinar cada uno de los coeficientes de los polinomios empleados, utilizando para la resolución del sistema de ecuaciones la metodología de mínimos cuadrados.

Una vez conocidos los coeficientes, pueden determinarse las correcciones a efectuar a cada uno de los puntos de la aerotriangulación a partir de las expresiones:

 $X=X_P+\Delta X$ $Y=Y_P+\Delta Y$ $Z=Z_P+\Delta X$

3.7. Formación y ajustes de bloques a partir de pasadas

En la formación de bloques a partir de pasadas se utilizan expresiones polinómicas que describen en función de las coordenadas, los errores que intervienen en su deformación, estas expresiones tendrán (en cada pasada) un juego de parámetros diferente. El bloque se formará uniendo todas las pasadas mediante los puntos que tengan en común, situados en la zona de recubrimiento común. Los polinomios (uno para cada coordenada) pueden estar relacionados mediante parámetros comunes o ser cada uno independiente de los demás. Lo más frecuente es que los polinomios planimétrico (en X e Y) sean dependientes y el que describe la deformación altimétrica no lo sea, como ocurre en el ejemplo con el que vamos a estudiar este tipo de ajuste. Veamos primero la unión y ajuste altimétrico para pasar luego al caso planimétrico.

3.7.1. Ajuste altimétrico

Consideremos el caso de la figura 22, la cual representa tres pasadas (cada una de ellas con seis modelos) que se van a unir altimétricamente, se dispone en cada una de ellas de las cotas de los puntos de enlace (que serán diferentes en los puntos comunes de cada pasada al estar tomadas en distintos sistemas de referencia).



Figura 22. Ajuste altimétrico de las tres pasadas representadas.

En este caso se asume que el polinomio que a continuación se expone representa adecuadamente la propagación de los errores altimétricos a lo largo de la pasada.

$$\Delta Z_{ij} = c_0 + c_1 x_{ij} + c_2 y_{ij} + c_3 x_{ij}^2 + c_4 x_{ij} y_{ij} \qquad (\Delta Z_{ij} = Z_{ij} - Z_i)$$

Los subíndices indican el punto i de la pasada j. Es un polinomio lineal en lo referente a las incógnitas que son los parámetros (c_0 , c_1 , c_2 , c_3 , c_4). Las coordenadas pueden estar referidas al sistema terreno o bien al instrumental (a escala de la pasada).

Debido a que el recubrimiento lateral entre pasadas normalmente pequeño, no se pueden unir satisfactoriamente para la formación del bloque, sin la utilización de una cierta distribución mínima de puntos de control. En esta caso se han situado un total de diez puntos de apoyos altimétricos, numerados del 100 al 109. Los restantes puntos (del 1 a 8) son puntos de control menor (puntos de enlace).

El proceso de formación del bloque consiste en encontrar los valores más probables para las quince incógnitas que representan los valores de las tres pasadas y de los cocho valores altimétricos.

Para la resolución del sistema se utilizará la metodología de mínimos cuadrados ya que el sistema esta sobredeterminado, de forma que los valores de los parámetros nos proporcionen el resultado deseado en las discrepancias altimétricas en los puntos de enlace.

Las ecuaciones de observación pueden escribirse de alguna de las formas siguientes, dependiendo de si el punto es de control o es un punto de enlace.

Así por ejemplo, para el punto de apoyo 100 de la primera pasada la ecuación a utilizar sería:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_{100} & y_{100} & x_{100}^2 & x_{100}y_{100} \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}_1^{\mathrm{T}} = \Delta Z_{100,1} = Z_{100,1} - Z_{100}$$

Para el punto de enlace 2 en la pasada primera tendríamos:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}_1^T + Z_2 = Z_{2,1}$$

Este mismo punto produce otra ecuación en la segunda pasada:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}_2^{\mathrm{T}} + Z_2 = Z_{2,2}$$

Para cada una de las pasadas habrá que determinar un total de cinco parámetros (c_0 , c_1 , c_2 , c_3 , c_4) y por cada punto de enlace una incógnita adicional (Z_n) que es el valor de la altitud del punto. Por tanto tendremos un total de incógnitas:

$$(5\times3)+(8\times1)=23$$

Con lo que respecta a las ecuaciones cada punto ya sea de enlace o de apoyo genera una ecuación vista anteriormente, luego tendremos un total de 32 ecuaciones.

En la tabla 1 se muestra el juego de ecuaciones de observación.

Para este ejemplo se han utilizado polinomios de segundo grado, pero se podrían usar otro tipo de ecuaciones de grado y aspecto diferente, la elección de uno u otro depende de las circunstancias y sobre todo de la experiencia del usuario. Los factores más sobresalientes a tener en cuenta en la elección son los siguientes:

- Pasadas largas precisan generalmente más términos y mayor grado de polinomio.
- Cuanto mayor sea el numero de términos M polinomio, más puntos de apoyo necesitaremos y por tanto mayor será el coste de la fase de campo. En bloques grandes, el hecho de pasar de polinomios de segundo a tercer grado multiplica casi por dos el trabajo de campo necesario. En estos casos es preferible dividir la pasada en secciones y utilizar expresiones menos elaboradas.

- Para casos de ajuste planimétrico, ecuaciones lineales podrían ser suficientes si se trata de pasadas cortas.
- Para el ajuste altimétrico, polinomios de segundo grado pueden ser suficientes, con tal de que la curva de error no tenga puntos de inflexión.
- Desde un punto de vista teórico, las expresiones de tercer grado son las mejores, pero en la práctica no son económicamente rentables.
- No existe una evidencia firme que justifique el uso continuado de polinomios de grado superior a cuatro. En general, el uso de expresiones de grado superior sin una sólida justificación teórica puede parecer sospechoso, pues aunque se obtiene un ajuste mejor en los puntos de apoyo, fuera de su zona de influencia el ajuste es sorprendentemente pobre.

[1	x 100	y ₁₀₀	x_{100}^2	$x_{100}^{}y_{100}^{}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0]	$\Delta Z_{100,1}$
1	\mathbf{x}_{101}	y ₁₀₁	\mathbf{x}_{101}^{2}	$x_{101}y_{101}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		$\Delta Z_{101,1}$
1	x 102	y ₁₀₂	${\bf x}_{102}^{2}$	$x_{102}y_{102}$											0	0	0	0	0	0	0	0		$\Delta Z_{102,1}$
1	\mathbf{x}_1	У ₁	\mathbf{x}_{1}^{2}	$\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1$											1	0	0	0	0	0	0	0		Z _{1,1}
1	x ₂	y ₂	X_{2}^{2}	$x_{2}y_{2}$											0	1	0	0	0	0	0	0		Z _{2,1}
1	\mathbf{x}_{103}	y ₁₀₃	\mathbf{x}_{103}^{2}	$x_{103}y_{103}$											0	0	0	0	0	0	0	0		$\Delta Z_{103,1}$
1	x ₃	y ₃	${\bf X}_{3}^{2}$	x_3y_3											0	0	1	0	0	0	0	0		Z _{3,1}
1	\mathbf{x}_4	\mathbf{y}_4	\mathbf{x}_{4}^{2}	x_4y_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		Z _{4,1}
1	\mathbf{x}_{104}	y_{104}	${\bf x}_{104}^2$	$x_{104}^{}y_{104}^{}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		$\Delta Z_{104,1}$
0	0	0	0	0	1	x ₁₀₂	y ₁₀₂	${x_{102}^{2}}$	$x_{102}^{}y_{102}^{}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		$\Delta Z_{102,2}$
0	0	0	0	0	1	\mathbf{x}_1	\mathbf{y}_1	\mathbf{x}_{1}^{2}	$\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0		Z _{1,2}
	-	-			1	\mathbf{x}_{2}	y_2	\mathbf{x}_{2}^{2}	$x_{2}y_{2}$						0	1	0	0	0	0	0	0	C.	Z _{2,2}
	-	-			1	\mathbf{x}_{103}	y_{103}	x_{103}^2	$x_{103}^{}y_{103}^{}$						0	0	0	0	0	0	0	0	c.	$\Delta Z_{103,2}$
	-		-		1	X ₃	\mathbf{y}_{3}	${\bf X}_{3}^{2}$	x_3y_3						0	0	1	0	0	0	0	0	c.	Z _{3,2}
	-	-			1	\mathbf{x}_4	\mathbf{y}_4	\mathbf{x}_{4}^{2}	$x_{4}y_{4} \\$						0	0	0	1	0	0	0	0	c.	Z _{4,2}
	-		-		1	\mathbf{x}_{104}	y_{104}	${\bf x}_{104}^2$	$x_{104}y_3 \\$						0	0	0	0	0	0	0	0	$\begin{vmatrix} c_{1} \end{vmatrix} =$	$\Delta Z_{104,2}$
					1	\mathbf{x}_{105}	y_{105}	\mathbf{x}_{105}^{2}	$x_{105}^{}y_{105}^{}$						0	0	0	0	0	0	0	0	c,	$\Delta Z_{105,2}$
					1	\mathbf{x}_{5}	\mathbf{y}_{5}	\mathbf{x}_{5}^{2}	$\mathbf{x}_{5}\mathbf{y}_{5}$						0	0	0	0	1	0	0	0		Z _{5,2}
					1	\mathbf{x}_{6}	\mathbf{y}_{6}	\mathbf{x}_{6}^{2}	x_6y_6						0	0	0	0	0	1	0	0	c,	Z _{6,2}
					1	\mathbf{x}_{106}	y_{106}	${\bf x}_{106}^2$	$x_{106} y_{106} \\$						0	0	0	0	0	0	0	0		$\Delta Z_{106,2}$
					1	\mathbf{X}_7	y ₇	\mathbf{x}_7^2	$\mathbf{x}_7 \mathbf{y}_7$						0	0	0	0	0	0	1	0	$ _{\mathbf{Z}_{2}} $	Z _{7,2}
					1	\mathbf{x}_{8}	y_8	${\bf X}_{8}^{2}$	$x_{8}y_{8}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		Z _{8,2}
	-	-			1	\mathbf{x}_{107}	y_{107}	${x_{107}^2}$	$x_{107}y_{107}\\$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		$\Delta Z_{107,2}$
	-	-								1	\mathbf{x}_{105}	y_{105}	x_{105}^2	$x_{105}y_{105}\\$	0	0	0	0	0	0	0	0		$\Delta Z_{105,3}$
	-	-								1	\mathbf{x}_{5}	\mathbf{y}_5	${\bf x}_{5}^{2}$	$\mathbf{x}_5\mathbf{y}_5$	0	0	0	0	1	0	0	0	Z_6	Z _{5,3}
	-	-								1	x ₆	\mathbf{y}_{6}	${\bf x}_{6}^{2}$	x_6y_6	0	0	0	0	0	1	0	0		Z _{6,3}
	-	-								1	\mathbf{x}_{106}	y_{106}	x_{106}^2	$x_{106} y_{106} \\$	0	0	0	0	0	0	0	0		$\Delta Z_{106,3}$
	-	-								1	\mathbf{x}_{7}	\mathbf{y}_7	${\bf x}_{7}^{2}$	$\mathbf{x}_7 \mathbf{y}_7$	0	0	0	0	0	0	1	0		Z _{7,3}
	-	-								1	\mathbf{x}_{8}	\mathbf{y}_{8}	${\bf x}_{8}^{2}$	$x_{8}y_{8}$	0	0	0	0	0	0	0	1		Z _{8,3}
	-									1	X ₁₀₇	y_{107}	${x_{107}^2}$	$x_{107}^{}y_{107}^{}$	0	0	0	0	0	0	0	0		$\Delta Z_{107,3}$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	\mathbf{x}_{108}	${y_{108}}$	x_{108}^2	$x_{108}^{}y_{108}^{}$	0	0	0	0	0	0	0	0		$\Delta Z_{108,3}$
[0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	X 109	y ₁₀₉	X ² ₁₀₉	$x_{109}^{}y_{109}^{}$	0	0	0	0	0	0	0	0_	J	$\left[\Delta Z_{109,3}\right]$
[A]																[X] =	[L]]					
										(32	×23)								(2	3×1)	(32	2×1)	

Tabla 1. Juego de ecuaciones de observación altimétrica.

3.7.2. Ajuste planimétrico

Generalmente hablando, la propagación de errores planimétricos en pasadas y bloques suele ser menos problemática que la altimétrica. Los errores son de magnitud inferior y se propagan más uniformemente en las diferentes direcciones. Con un mínimo apoyo altimétrico para nivelar las pasadas aproximadamente, de modo que no aparezcan errores por esta causa, se podría hacer el ajuste planimétrico de la pasada sin necesidad de puntos de apoyo planimétricos.

También en el tratamiento de las coordenadas planimétricas podemos escribir las ecuaciones en forma de error o en forma de ecuaciones de transformación, usaremos en este caso el segundo tipo de expresión.

Debido a la gran cantidad de ecuaciones que originaría el ejemplo visto anteriormente, se propone para realizar el ajuste planimétrico un nuevo bloque compuesto por dos pasadas *(Fig. 23)*. Se propone utilizar las siguientes expresiones polinómicas para su ajuste planimétrico:

$$X = a_0 + a_1 x - b_1 y + a_2 x^2 - 2b_2 xy$$
$$Y = b_0 + b_1 x + a_1 y + b_2 x^2 + 2a_2 xy$$



Figura 23. Ajuste planimétrico de las dos pasadas representadas.

Estas ecuaciones introducen un total de seis incógnitas para cada una de las pasadas objeto del ajuste. En definitiva tendremos:

> Número de ecuaciones = $(2 \times 7) + (2 \times 7) = 28$ Número de incógnitas = $(2 \times 6) + (2 \times 2) + (1 \times 2) = 18$

Las ecuaciones de observación pueden escribirse para un punto de apoyo i de la pasada j de la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_{ij} & x_{ij}^{2} & 0 & -y_{ij} & -2x_{ij}y_{ij} \\ 0 & y_{ij} & 2x_{ij}y_{ij} & 1 & x_{ij} & x_{ij}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{0} \\ a_{1} \\ a_{2} \\ b_{0} \\ b_{1} \\ b_{2} \end{bmatrix}_{i} = \begin{bmatrix} X_{i} \\ Y_{i} \end{bmatrix}$$
Para un punto de enlace i de la pasada j, las ecuaciones de observación tendrían la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_{ij} & x_{ij}^2 & 0 & -y_{ij} & -2x_{ij}y_{ij} & -1 & 0 \\ 0 & y_{ij} & 2x_{ij}y_{ij} & 1 & x_{ij} & x_{ij}^2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ X_i \\ Y_i \end{bmatrix}_j = 0$$

En la siguiente tabla se muestra el juego completo de ecuaciones de observación.

1	\mathbf{X}_{100}	${x}_{100}^{2}$	0	$- y_{100}$	$-2x_{_{100}}y_{_{100}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		[X 100
0	y 100	$2x_{_{100}}y_{_{100}}$	1	\mathbf{x}_{100}	X^{2}_{100}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			Y ₁₀₀
1	x ₁₀₁	x ² ₁₀₁	0	$-y_{101}$	$-2x_{_{101}}y_{_{101}}$			-		-	-	0	0	0	0	0	0			X 101
0	y_{101}	$2x_{_{101}}y_{_{101}}$	1	\mathbf{x}_{101}	X_{101}^2							0	0	0	0	0	0			Y ₁₀₁
1	\mathbf{X}_{102}	${\bf x}_{102}^{\ 2}$	0	$- y_{102}$	$-2x_{_{102}}y_{_{102}}$				-			0	0	0	0	0	0			X 102
0	y_{102}	$2x_{_{102}}y_{_{102}}$	1	\mathbf{X}_{102}	X_{102}^2	-						0	0	0	0	0	0	a		Y ₁₀₂
1	\mathbf{x}_1	${\bf X}_{1}^{2}$	0	- y ₁	$-2x_{1}y_{1}$				-			- 1	0	0	0	0	0	a ₁		0
0	\mathbf{y}_1	$2x_{\scriptscriptstyle 1}y_{\scriptscriptstyle 1}$	1	\mathbf{x}_1	${\bf X}_{1}^{2}$		-			-		0	- 1	0	0	0	0	a 2		0
1	X 103	${\bf x}_{103}^{\ 2}$	0	$-y_{103}$	$-2x_{_{103}}y_{_{103}}$							0	0	- 1	0	0	0	b ₀		0
0	y_{103}	$2x_{_{103}}y_{_{103}}$	1	x 103	X_{103}^{2}							0	0	0	- 1	0	0	b ₁		0
1	x 2	X_{2}^{2}	0	- y 2	$-2x_{2}y_{2}$			-				0	0	0	0	- 1	0	b ₂		0
0	y ₂	$2 x_{2} y_{2}$	1	X ₂	X_{2}^{2}			-				0	0	0	0	0	- 1	a ₀		0
1	X 104	${x}_{104}^{2}$	0	$- y_{104}$	$-2x_{_{104}}y_{_{104}}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a ₁		X 104
0	y_{104}	$2x_{_{104}}y_{_{104}}$	1	\mathbf{x}_{104}	X_{104}^{2}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a ₂		Y ₁₀₄
0	0	0	0	0	0	1	X 102	${\bf x}_{102}^{2}$	0	$-y_{102}$	$-2x_{_{102}}y_{_{102}}$	0	0	0	0	0	0	b ₀	- :	X 102
0	0	0	0	0	0	0	y 102	$2x_{_{102}}y_{_{102}}$	1	X 102	X ² ₁₀₂	0	0	0	0	0	0	b ₁		Y ₁₀₂
					-	1	\mathbf{x}_1	X_{1}^{2}	0	- y ₁	$-2x_{1}y_{1}$	- 1	0	0	0	0	0	b ₂		0
						0	\mathbf{y}_1	$2x_{1}y_{1}$	1	\mathbf{x}_1	${\bf x}_{1}^{2}$	0	- 1	0	0	0	0	X 1		0
						1	X 103	${\bf X}_{103}^2$	0	- y ₁₀₃	$-2x_{_{103}}y_{_{103}}$	0	0	- 1	0	0	0	Y1		0
						0	У ₁₀₃	$2x_{_{103}}y_{_{103}}$	1	\mathbf{x}_{103}	X ² ₁₀₃	0	0	0	- 1	0	0	X 103		0
						1	X 2	X_{2}^{2}	0	- y 2	$-2x_{2}y_{2}$	0	0	0	0	- 1	0	Y ₁₀₃		0
						0	y 2	$2 x_{2} y_{2}$	1	x 2	X 2 2	0	0	0	0	0	- 1	X 2		0
						1	X ₁₀₄	X_{104}^{2}	0	- y ₁₀₄	$-2x_{_{104}}y_{_{104}}$	0	0	0	0	0	0	Y ₂		X 104
						0	У ₁₀₄	$2x_{_{104}}y_{_{104}}$	1	X ₁₀₄	${f x}_{104}^{\ 2}$	0	0	0	0	0	0			Y ₁₀₄
						1	X 105	\mathbf{x}_{105}^{2}	0	- y ₁₀₅	$-2x_{_{105}}y_{_{105}}$	0	0	0	0	0	0		:	X 105
	÷					0	y 105	$2x_{_{105}}y_{_{105}}$	1	X 105	x ² ₁₀₅	0	0	0	0	0	0			Y ₁₀₅
0	0	0	0	0	0	1	X 106	x ² ₁₀₆	0	- y ₁₀₆	$-2x_{_{106}}y_{_{106}}$	0	0	0	0	0	0			X 106
0	0	0	0	0	0	0	y 106	$2x_{_{106}}y_{_{106}}$	1	X ₁₀₆	X ² ₁₀₆	0	0	0	0	0	0		[Y ₁₀₆
								[A]							[X]	= [I	_]		

[X] =	=[L]
(23×1)	(32×1)

Tabla 2. Juego de ecuaciones de observación planimétrica.

(32×23)

Bibliografía

- Albertz, J, y Kreiling W., Manual fotogramétrico de bolsillo, Witcmann, H., Karlsruhe (1989), 4^a Edición. ISBN 3-87907-176-4.
- American Society of Photogrammetry. Manual of Photogrammetry, ASPRS, Cuarta Edición (1980). ISBN 0-937294-01-2.
- Burnside, C.D., Mapping from Aerial Photographs, Collins Professional, Londres, Segunda Edición (1979). ISBN 0-00-383036-5.
- Chueca P., M., Topografía, Dossat, Madrid (1982), Tomo II. ISBN 84-237-0591-9.
- Clavo, L., Fotogrametría II, Universidad Politécnica de Madrid, EUITT.
- Gómez, A., Fotogrametría Analítica, Universidad Politécnica de Madrid, ETSIA.
- Ghosh, S.K., Phototriangulation, Lexingtong Books, Londres (1975). ISBN 0-669-98210-5.
- Ghosh, S.K., Analytical Photogrammetry, Pergamon Press, Oxford (1988), 2^a Edición. ISBN 0-08-036103-X.
- Heras, A.E., Apuntes de Fotogrametría, Universidad Politécnica de Madrid, EUITT.
- Krauss, K., Photogrammetry, Dümmler/Bonn (1993). ISBN 3-427-78684-6.
- Lerma, J.L., Aerotriangulación: Cálculo y compensación de un bloque fotogramétrico, Servicio de publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia, 1999. ISBN 84-7721-847-1.
- Moffitt, F.H. y Mikhail, E.M., Photogrammetry, Harper & Row Publishers., New York (1980), 3^a edición. ISBN 0-216-91996-7.
- Shut, G.H. Similary Transformation and Least Squares. Photogrammetric Engineering, 1973:621-628.
- Shut, G.H. Polinomial transformation of strips versus linear transformation of models. A theory and experiments. Photogrametria, vol. 22, nº 6, 1967.
- Wolf, P.R, Independent Model Triangulation, Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, vol. 56, nº 2, 1990, p. 1643.
- Wolf, P.R. y Dewitt, B.A., Elements of Photogrammetry with Applications in GIS, McGraw-Hill, EEUU, Tercera Edición (2000). ISBN 0-07-292454-3.
- Zhizhuo, W., Principles of Photogrammetry, Beijing, China (1990). ISBN 7-81030-00-8.

TEMA 4

AEROTRIANGULACIÓN POR MODELOS INDEPENDIENTES

4.1. Introducción
4.2. Principio teórico del método
4.3. Determinación de las coordenadas de los centros de proyección
4.4. Formación y ajuste de bloques a partir de modelos

4.4.1. Ajuste planimétrico
4.4.2. Ajuste altimétrico
4.4.3. Ajuste espacial
4.4.3. Ajuste separado pero simultáneo de planimetría y altimetría

4.1. Introducción

A partir de 1960 solamente había dos modos de adquisición de datos para aerotriangulación uno el modelo analógico que precisa de aparatos de primer orden y otro, utilizando estereocomparadores, también caros y con poco soporte de programas de cálculo para aerotriangulación totalmente analítica, aparte de la necesidad de grandes ordenadores para ejecutar este tipo de procesamiento de datos.

A Thomson y a alguien más, se le debe la idea de reunir en cierto modo ambos tipos de aerotriangulación, empleando instrumentos ya existentes y no demasiado caros *(autógrafo de precisión Wild A-8, Estereosimplex II de Galileo, ...etc.)*, desprovistos de paralelogramo de Zeiss e inversores ópticos, pero capaces de formar modelos de gran precisión y con algún tipo de salida digital de coordenadas instrumentales. La clave de este método está en la idea de tener que formar la pasada de forma instrumental y solamente formar el modelo en el instrumento de restitución, encargándose el ordenador de efectuar la conexión de los modelos entre si.

Este método es muy versátil respecto a la entrada de datos capaces de utilizar para formar la máxima cantidad de ecuaciones y obtener de este modo un mejor resultado; así pueden utilizarse como datos:

- Modelos obtenidos por pares de fotogramas de vuelos a diferentes alturas.
- Bloques transversales superpuestos o simplemente alguna pasada transversal superpuesta.

Vuelos con cualquier tipo de recubrimiento^(*).

En cuanto a datos adicionales, pueden incorporarse:

- Altura de vuelo por estatoscopio.
- Datos de perfiles APR.
- Condición de Lagos, Ríos,....etc.
- Datos de otras aerotriangulaciones.

Cuando se usan instrumentos de restitución analógicos para realizar la formación relativa de los modelos y medición de coordenadas, el método de modelos independientes es conocido también con el nombre de A*erotriangulación Semianalítica*.

4.2. Principio teórico del método

Este método tiene un desarrollo paralelo al avance de los medios de cálculo siendo uno de los más utilizados. Se adapta a cualquier tipo de instrumento de restitución con tal que la precisión en las medidas sea la adecuada. En la fase instrumental, se realiza la orientación relativa de cada uno de los modelos objeto de la aerotriangulación y la medición de las coordenadas de los puntos seleccionados y señalizados en las diapositivas (puntos de apoyo, de paso y enlace).

Una vez finalizada la fase instrumental se tendrá cada uno de los modelos con sistemas de coordenadas diferentes. Suele utilizarse como origen de coordenadas de los modelos el respectivo centro de proyección izquierdo.

La fase de cálculo consistirá en unir cada uno de los modelos mediante transformaciones tridimensionales sucesivas de coordenadas, de forma que todos los puntos del bloque estén referidos a un sistema de coordenadas único para poder proceder de todos los puntos (puntos de control menor o complementarios) del bloque fotogramétrico considerado.

Por lo general no existen diferencias entre la fase de cálculo y la de ajuste-compensación ya que ambas se hacen en el ordenador de forma simultánea.



Figura 1-a. Modelos orientados individualmente.

^{*} Al hablar de cualquier tipo de recubrimiento hay que hacer notar que nos referimos a todos aquellos recubrimiento tanto longitudinales como transversales dentro de una cierta lógica fotogramétrica.



Figura 1-b. Sistema de coordenadas independiente para cada modelo.



Figura 1-c. Sistema de coordenadas para todos los modelos único.

Los centros de proyección instrumental se usarán como puntos adicionales de paso durante la conexión de cada uno de los modelos del bloque, con la labor de controlar el grado de inclinación longitudinal (Φ) de los modelos, ya que los tres puntos de paso (*Fig. 2 –4, 5, 6-*) podrían dar lugar a una mala determinación del giro longitudinal, pudiéndose cometer un error $\Delta \Phi$.



Figura 2. Error en la determinación del ángulo de inclinación longitudinal.



Figura 3. Conexión de modelos utilizando el centro de proyección como punto de paso.

En la fase de cálculo puede decirse que existen dos posibilidades a seguir, una realiza el cálculo de los siete parámetros de la transformación tridimensional de cada modelo de una vez y la otra realiza el cálculo en dos fases, la primera calcula cuatro parámetros (λ , K, T_X, T_Y) llamado ajuste planimétrico y después se calcula el resto de los parámetros (Φ , Ω , T_Y), es el denominado ajuste altimétrico.

4.3. Determinación de las coordenadas de los centros de proyección.

Anteriormente se ha comentado que en el método de aerotriangulación por modelos independientes se utilizan para realizar la conexión de modelos consecutivos, además de los puntos de apoyo y de control menores (enlace y paso), los centros de proyección de los respectivos modelos para asegurar una correcta unión de los mismos.

Para calcular las coordenadas de los centros de proyección hay que tener en cuenta el tipo de instrumento de restitución que se va a emplear. En el caso de instrumentos de restitución analíticos, dichas se obtienen directamente del algoritmo de cálculo *(condición de coplaneidad o colinealidad)* utilizado una vez finalizada la fase de orientación en dos pasos (orientación analítica relativa).

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \beta y & \beta z \\ \overline{x_1} & \overline{y_1} & \overline{z_1} \\ \overline{x_2} & \overline{y_2} & \overline{z_2} \end{bmatrix} = 0 \begin{cases} Método de un proyector \Rightarrow bx, by, bz, \omega_2, \varphi_2, \kappa_2 \\ Método de los giros \Rightarrow bx, \varphi_1, \kappa_1, \omega_2, \varphi_2, \kappa_2 \end{cases}$$

Ecuación 1. Condición de coplaneidad.

$$\left. \begin{array}{l} x = -c \frac{m_{11}(X - X_{o}) + m_{12}(Y - Y_{o}) + m_{13}(Z - Z_{o})}{m_{31}(X - X_{o}) + m_{32}(Y - Y_{o}) + m_{33}(Z - Z_{o})} \\ y = -c \frac{m_{21}(X - X_{o}) + m_{22}(Y - Y_{o}) + m_{23}(Z - Z_{o})}{m_{31}(X - X_{o}) + m_{32}(Y - Y_{o}) + m_{33}(Z - Z_{o})} \end{array} \right\} \Rightarrow X_{o}, Y_{o}, Z_{o}$$

Ecuación 2. Condición de colinealidad.

Si hablamos de instrumentos analógicos, existen varios métodos que permiten determinar dichas coordenadas. La elección del método dependerá del tipo de instrumento que se vaya a emplear.

El método de *Lectura directa o Barra guía vertical* requiere de un instrumento con un equipamiento específicamente designado (*Fig. 4*) para este propósito. Este equipamiento es standard en el instrumento Kern PG-2, y básicamente consiste en un telescopio de colimación y un espejo para alinear cada barra verticalmente por el principio de autocolimación. Una vez las barras estén completamente verticales se puede leer las coordenadas X_O e Y_O de los centros de proyección. También, ajustando el movimiento Z de la columna a una posición determinada, (situando una marca de referencia de la barra guía en coincidencia con la doble cruz filar de un microscopio) y sumando a la constante de calibración k el valor Z leído en esta posición del carro se obtendrá la coordenada Z_O del centro de proyección ($Z_O = Z + K$).

La lectura de las coordenadas de los centros de proyección se lleva a cabo una vez efectuada la orientación relativa de cada modelo. Una variante del método se utilizará cuando haya que utilizar componentes de base (*by ó bz*) en la orientación relativa.



Figura 4. Equipamiento específico para la determinación de las coordenadas de los centros de proyección.

Un segundo método de determinación de coordenadas de centros de proyección. denominado como el método de *Resección en el espacio o de los dos plano (Fig. 5)*. Consiste básicamente en leer monocularmente las coordenadas $X \in Y$ de determinados puntos grabados en las placas de los proyectores (normalmente las marcas fiduciales) en el sistema de coordenadas instrumental o del modelo en dos niveles extremos de la columna de Z. Leídas las coordenadas se formará el sistema de ecuaciones que representa cada rayo en el espacio y por intersecciones de estos se obtendrá el centro de proyección.

FOTOGRAMETRÍA III

Así para un punto tendremos, las ecuaciones de las rectas formadas por esos puntos en ambas posiciones (alta y baja) es:

$$\frac{\mathbf{X}_{\mathrm{O}} - \mathbf{X}_{\mathrm{B}}}{\mathbf{X}_{\mathrm{A}} - \mathbf{X}_{\mathrm{B}}} = \frac{\mathbf{Y}_{\mathrm{O}} - \mathbf{Y}_{\mathrm{B}}}{\mathbf{Y}_{\mathrm{A}} - \mathbf{Y}_{\mathrm{B}}} = \frac{\mathbf{Z}_{\mathrm{O}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{B}}}{\mathbf{Z}_{\mathrm{A}} - \mathbf{Z}_{\mathrm{B}}}$$



Figura 5. Medición monocular de las coordenadas en dos extremos de Z (A, alta y B, baja).

Siendo:

- X₀, Y₀, Z₀ las coordenadas del centro de proyección.
- X_A, Y_A, Z_A las coordenadas de un punto en la posición más alta y X_B, Y_B, Z_B las coordenadas del mismo punto en la posición más baja.

El sistema de ecuaciones resultante se resuelve utilizando la metodología de mínimos cuadrados. Despejando de las anteriores ecuaciones, llegaremos a obtener el siguiente sistema de ecuaciones de observación, que nos permiten determinar X_O , Y_O , Z_O .

$$(X_{o} - X_{B})(Z_{A} - Z_{B}) = (Z_{o} - Z_{B})(X_{A} - X_{B}) \Rightarrow X_{o}Z_{A} - X_{o}Z_{B} - X_{B}Z_{A} = X_{A}Z_{O} - X_{A}Z_{B} - X_{B}Z_{O} \Rightarrow \Rightarrow X_{o}(Z_{A} - Z_{B}) + Z_{o}(X_{B} - X_{A}) = X_{B}Z_{A} - X_{A}Z_{B} (Y_{o} - X_{B})(Z_{A} - Z_{B}) = (Z_{O} - Z_{B})(Y_{A} - Y_{B}) \Rightarrow Y_{O}Z_{A} - Y_{O}Z_{B} - Y_{B}Z_{A} = Y_{A}Z_{O} - Y_{A}Z_{B} - Y_{B}Z_{O} \Rightarrow \Rightarrow Y_{O}(Z_{A} - Z_{B}) + Z_{O}(Y_{B} - Y_{A}) = Y_{B}Z_{A} - Y_{A}Z_{B}$$

Expresando el sistema de ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \left(Z_{1,A} - Z_{1,B} \right) & 0 & \left(X_{1,B} - X_{1,A} \right) \\ 0 & \left(Z_{1,A} - Z_{1,B} \right) & \left(Y_{1,B} - Y_{1,A} \right) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(Z_{4,A} - Z_{4,B} \right) & 0 & \left(X_{4,B} - X_{4,A} \right) \\ 0 & \left(Z_{4,A} - Z_{4,B} \right) & \left(Y_{4,B} - Y_{4,A} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{0} \\ Y_{0} \\ Z_{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(X_{1,B} Z_{1,A} - X_{1,A} Z_{1,B} \right) \\ \left(Y_{1,B} Z_{1,A} - Y_{1,A} Z_{1,B} \right) \\ \vdots \\ \left(X_{2,B} Z_{2,A} - X_{2,A} Z_{2,B} \right) \\ \left(Y_{2,B} Z_{2,A} - Y_{2,A} Z_{2,B} \right) \end{bmatrix}$$

Como mínimo se necesitarán dos puntos leídos en los dos extremos de Z para obtener una solución, en la práctica se leen las cuatro marcas fiduciales y se obtiene la solución por mínimos cuadrados. La ventaja de este método es que no necesita un equipamiento especial.

Para concluir con los métodos analógicos citar un tercer método, usualmente llamado de la *Placa reticulada*, necesita una placa de vidrio reticulada, fabricada con gran precisión y que se centra cuidadosamente en cada proyector. Una vez colocada adecuadamente se procede a leer monocularmente las coordenadas *X*, *Y*, *Z* modelo de un número de puntos suficientes de la cuadrícula (a ser posible aquéllos que aparecen en las esquinas del espacio modelo). Asimilando la distancia principal del proyector a la local de la cámara, las coordenadas de los puntos de intersección de la retícula de la placa a las coordenadas imagen y las coordenadas modelo de los puntos de la retícula como las coordenadas del terreno, se resuelve el problema de intersección inversa espacial por medio de la condición de colinealidad, obteniendo las coordenadas del centro de proyección (*Fig. 6*).



Figura 6. Determinación de las coordenadas del centro de proyección mediante el método de placa reticulada.

FOTOGRAMETRÍA III

Se deben leer un mínimo de tres puntos de la retícula para obtener una solución, pero en la práctica se recomienda leer coordenadas al menos en las cuatro esquinas. Los test realizados demuestran que la precisión en la obtención de las coordenadas del centro de proyección se incrementa cuando aumenta el número de puntos leídos, sin embargo pasando de diez puntos el grado de precisión no aumenta sustancialmente.

De los tres métodos descritos el de mayor precisión siempre que se hayan centrado las placas cuidadosamente en los proyectores y se haya llevado a cabo de igual forma la orientación relativa, es el de las placas reticuladas.

Las discrepancias entre las coordenadas modelo medidas X, Y, Z de los puntos de la retícula y sus correspondientes X^C , Y^C , Z^C del sistema de control (placa reticulada) son una indicación de algún desajuste con respecto a las condiciones ideales. Estas discrepancias pueden ser debidas a un desajuste del instrumento, a diferentes escalas entre los ejes X, Y en el instrumento, a la no ortogonalidad entre dichos ejes,.....etc. . Estas discrepancias de errores se pueden expresar matemáticamente a través de ecuaciones de observación siguientes:

$$V_{X} = a_{1}X + a_{2}Y + a_{3}XY + a_{4}X^{2} + a_{5}Y^{2} + a_{6}X^{2}Y + a_{7}XY^{2} + a_{8}X^{2}Y^{2}$$

$$V_{Y} = b_{1}X + b_{2}Y + b_{3}XY + b_{4}X^{2} + b_{5}Y^{2} + b_{6}X^{2}Y + b_{7}XY^{2} + b_{8}X^{2}Y^{2}$$

$$V_{Z} = c_{1}X + c_{2}Y + c_{3}XY + c_{4}X^{2} + c_{5}Y^{2} + c_{6}X^{2}Y + c_{7}XY^{2} + c_{8}X^{2}Y^{2}$$

En las ecuaciones anteriores V_X , V_Y , V_Z son los errores en X, Y, Z; los términos en a, b y c son los coeficientes que describen la deformación del modelo. Un conjunto de tres ecuaciones de este tipo se puede escribir para cada punto leído del modelo reticulado. Si se leen ocho puntos se obtendrá una única solución para las 24 incógnitas. Si se leen más de 8, el cálculo debe hacerse por mínimos cuadrados. Después de haber obtenido los coeficientes e, las ecuaciones anteriores se utilizan para corregir las deformaciones del modelo para cada punto en aerotriangulación semianalítica. De tal manera que este procedimiento de modelo reticulado no sólo permite obtener las coordenadas de los centros de proyección sino también las correcciones a efectuar debidas a errores sistemáticos del instrumento, incrementando de hecho la precisión de la triangulación aérea.

4.4. Formación y ajuste de bloques a partir de modelos.

En este caso la unidad básica de ajuste es el modelo único, o posiblemente un pequeño grupo de modelos (normalmente compuesto por dos o cuatro modelos) llamados secciones. Dentro de esta unidad, los errores pueden ser considerados insignificantes y así cada unidad (modelo o sección) se ajusta solo como una entidad. La escala, posición y orientación de cada unidad podría cambiarse pero no su forma. Por lo tanto sólo nos ocuparemos aquí con transformaciones conformes o de semejanza.

Con respecto al ajuste, el modelo quedará definido mediante cuatro puntos situados en las cuatro esquinas del modelo (*Fig 7-a*) en el caso de un ajuste planimétrico, y mediante las coordenadas de seis puntos (los cuatro anteriores más los dos centros perspectivos) en el caso de un ajuste espacial (*Fig 7-b*). Si ciertos puntos de enlace no pueden observarse o se piensa que están en inferioridad de condiciones respecto de los demás, entonces pueden introducirse siempre algunos puntos adicionales para aumentar la consistencia de la unión de un modelo particular. Las coordenadas modelos pueden obtenerse de las observaciones de modelos efectuadas en el restituidor o por medios analíticos en diferido (*off-line*) utilizando observaciones de estereocomparadores en conjunción con las condiciones de colinealidad y coplaneidad; también pueden obtenerse dichas coordenadas a partir de mediciones digitales.

En la formación y ajuste de bloques de modelos pueden considerarse dos posibilidades; la primera es realizar el ajuste planimétrico separado del altimétrico, el cual se efectuará en un fase posterior. En segundo caso se ajustan al mismo tiempo las tres coordenadas mediante el uso de modelos espaciales (tridimensionales). En ambas situaciones, todas las secciones o modelos deben trasladarse aproximadamente a la posición correcta, orientación y escala antes de realizar cualquier ajuste, es decir, todos los modelos que formen el bloque deben de tener coordenadas homogéneas (coordenadas terreno aproximadas). En el caso ideal, las diferencias en los valores de coordenadas entre puntos comunes de modelos adyacentes deberían de ser pequeñas en magnitud y presentar una distribución lo más aleatoria posible.

Para el caso planimétrico, el bloque puede formarse aproximadamente sin necesidad del uso de puntos de apoyo y calcular su escala, orientación y desplazamiento conociendo las coordenadas de dos puntos en ambos sistemas(como mínimo).

En el caso espacial, donde la unidad básica es el modelo tridimensional, el bloque no puede formarse tan fácilmente, y se necesita distribuir una cierta cantidad de apoyo por el bloque para lograr el estado deseado de preparación. El requisito principal es asegurarse de una buena distribución del control altimétrico para asegurar la ausencia de errores groseros en la orientación. La cantidad de control utilizada para este fin varía en la práctica desde mínimo absoluto a la situación dónde cada pasada puede ser objeto de un razonable y riguroso ajuste polinómico. En este caso último, cualesquier error grosero en los puntos de enlace pueden identificarse fácilmente y quitarlos antes del comienzo del ajuste por mínimos cuadrados.

Por ser la unidad básica más pequeña, este método de ajuste de bloques es más flexible que el método de la banda y generalmente ofrece mejores resultados, con tal que se disponga de una cantidad de apoyo suficiente, aunque genere mayor número de ecuaciones y es, por tanto, una mayor potencia de cálculo, cosa que hoy en día no presentan ningún inconveniente.



Figura 7-a. Ajuste planimétrico.



Figura 7-b. Ajuste espacial

4.4.1. Ajuste planimétrico

Para estudiar este caso se va a considerar un pequeño bloque fotogramétrico constituido por cuatro modelos según la figura 8. Tendremos en este caso cuatro modelos cuyas coordenadas han sido observadas independientemente, por ejemplo en un instrumento de restitución. Las diferencias entre las coordenadas de los puntos de enlace comunes no serán muy grandes, necesitando a partir de aquí, obtener un juego de coordenadas homogéneas del bloque que sean lo más exacto posible.

FOTOGRAMETRÍA III

Para conseguir esto se realizará una transformación conforme sobre cada modelo. Como ya sabemos, se puede formar una especie de bloque sin necesidad de puntos de apoyo, pero con objeto de poder determinar la posición, escala y orientación correctas, es necesario conocer al menos dos puntos de posición planimétrica conocida en el terreno. En el ejemplo propuesto en la figura 8 sin embargo se han distribuido cuatro puntos de apoyo (100, 200, 300, 400) en las cuatro esquina del bloque, de la forma más óptima.



Figura 8. Bloque fotogramétrico de cuatro modelos objeto de ajuste planimétrico.

La transformación lineal conforme que tiene que sufrir cada modelo se representa por las ecuaciones de una transformación bidimensional conforme:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos K & -\sin K \\ \sin K & \cos K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

donde los parámetros *a* y *b* son función del factor de escala (λ) y del ángulo de rotación (*K*) del modelo ($a = \lambda cos K$; $b = \lambda sen K$), y X e Y son las coordenadas bloque que se desean obtener a partir del sistema de referencia local de coordenadas modelo (x, y).

Para un punto de apoyo *i* que aparezca en el modelo *j*-ésimo tenemos por lo tanto el siguiente par de ecuaciones de observación:

_

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{ij} & -\mathbf{y}_{ij} & 1 & 0 \\ \mathbf{y}_{ij} & \mathbf{x}_{ij} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{T}_{\mathbf{X}} \\ \mathbf{T}_{\mathbf{Y}} \end{bmatrix}_{j} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{i} \\ \mathbf{Y}_{i} \end{bmatrix}$$

Para un punto de enlace o paso k que aparece en el modelo l, las ecuaciones serán:

$$\begin{bmatrix} x_{kl} & -y_{kl} & 1 & 0 & -1 & 0 \\ y_{kl} & x_{kl} & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ T_{x} \\ T_{y} \\ X_{k} \\ Y_{k} \end{bmatrix}_{1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Puede observarse que hay cuatro incógnitas por cada modelo junto con las dos incógnitas adicionales correspondientes a cada punto de paso o enlace. Estos últimos generan dos ecuaciones de observación cada vez que aparecen en un modelo, al igual que los puntos de apoyo. Para el caso de nuestro ejemplo tenemos:

Número total de ecuaciones = $(4 \times 2 \times 4) = 32$ Número total de incógnitas = $(4 \times 4) + (2 \times 5) = 26$

El juego completo de ecuaciones de observación correspondiente al ejemplo propuesto se muestra en la siguiente tabla:

x 100	$-y_{100}^{}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		$\left\lceil X_{100} \right\rceil$
y ₁₀₀	\mathbf{x}_{100}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		y ₁₀₀
x ₁	$-\mathbf{y}_1$	1	0	-				I .							. ¦	- 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0
y 1	x ₁	0	1												. i	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	[a]	0
x 2	- y ₂	1	0	-				 ·				1 ·			 	0	0	- 1	0	0	0	0	0	0	0	b	0
y ₂	X ₂	0	1					I .							. !	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	T _x	0
x ₃	- y ₃	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	- 1	0	0	0	0	0	T _y	0
y ₃	X ₃	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	- 1	0	0	0	0	a	0
0	0	0	0	x 1	- y ₁	1	0	<u> </u>	·			<u> </u>	- -			- 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	b	0
0	0	0	0	\mathbf{y}_1	x ₁	0	1	, ,							. i	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	T _x	0
				X ₁₀₁	- y ₁₀₁	1	0	 ·				 ·			 	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T _Y	X.00
				y_{101}	X ₁₀₁	0	1	l .							. ¦	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a	X.00
			. i	X ₃	- y ₃	1	0								. i	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	b	0
				y ₃	X ₃	0	1	 ·				 ·			· 1	0	0	0	0	0	- 1	0	0	0	0	T _x	0
				\mathbf{X}_4	$-y_4$	1	0	l .				I .			. ¦	0	0	0	0	0	0	- 1	0	0	0	T _y	0
			. 1	y_4	\mathbf{x}_4	0	1								. i	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	a	_ 0
+	- 0 -	0	0	0	- 0 -	0	0	x ₂	- y 2	1	_0_	⊢ – - I ·		- <u>-</u> -		0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	b	0
0	0	0	0	0	0	0	0	y ₂	\mathbf{x}_{2}	0	1	I .			. ¦	0	0	0	- 1	0	0	0	0	0	0	T _x	0
				-				x 3	$-y_3$	1	0				. i	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	T _y	0
				-				У ₃	x ₃	0	1	 ·			· 1	0	0	0	0	0	- 1	0	0	0	0	X ₁	0
								x ₁₀₂	$- y_{102}$	1	0				. ¦	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y ₁	X ₁₀₂
			. j					y ₁₀₂	${\bf x}_{102}$	0	1	. .			. i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X ₂	Y ₁₀₂
			- 1					х ₅	$-y_5$	1	0	 ·			· 1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	Y ₂	0
								y₅	x ₅	0	1	I I			. ¦	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	X ₃	0
0	0	0	0	0		0	0	. .		0	0	X ₃	- y ₃	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	Y ₃	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	У ₃	X ₃	0	1	0	0	0	0	0	- 1	0	0	0	0	X4	0
								I I		0	0	x ₄	$-y_4$	1	0	0	0	0	0	0	0	- 1	0	0	0	Y ₄	0
	-				-					0	0	У ₄	\mathbf{x}_4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	X ₅	0
				-						\mathbf{x}_2	0	х ₅	$-y_5$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	Y ₅	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	y ₅	x ₅	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1		0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x ₁₀₃	$- y_{103}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		X ₁₀₃
[0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	У ₁₀₃	x ₁₀₃	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0]		L ¹ 103 J
												A]										[]	X1	[L]			

Tabla 1. Juego de ecuaciones de observación planimétrico.

FOTOGRAMETRÍA III

Una vez planteadas las ecuaciones de observación el paso siguiente es la formación y solución de las ecuaciones normales por el método de mínimos cuadrados y otras técnicas matemáticas. Cuando se trata de matrices que forman conjuntos de manera regular, es muy útil el empleo de métodos de partición de submatrices que se manejan como elementos simples de una matriz.

El método de partición está solamente limitado por las necesidades de compatibilidad en el proceso de adición y multiplicación. En el siguiente ejemplo se ilustra lo anteriormente dicho.

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11}^{T} & B_{12}^{T} \\ B_{21}^{T} & B_{22}^{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11}^{T} + A_{12}B_{21}^{T} & A_{11}B_{12}^{T} + A_{12}B_{22}^{T} \\ A_{21}B_{11}^{T} + A_{22}B_{21}^{T} & A_{21}B_{12}^{T} + A_{22}B_{22}^{T} \end{bmatrix}$$

Para poder llevar a cabo esto se tiene que cumplir:

- • A_{11} de orden $m \times n \operatorname{con} B_{11}$ de orden $n \times m$.
- • A_{12} de orden $m \times p \operatorname{con} B_{12}$ de orden $p \times m$.
- • A_{21} de orden q $\times n \operatorname{con} B_{21}$ de orden n $\times q$.
- • A_{22} de orden q $\times p$ con B_{22} de orden p $\times q$.

y así sucesivamente.

El uso típico de partición lo encontramos en la solución de algunos sistemas de ecuaciones normales. Por ejemplo, en el caso donde la matriz columna de las incógnitas está compuesta de los parámetros de transformación y las coordenadas de los puntos del ejemplo planimétrico propuesto. La solución del sistema de ecuaciones sería bastante laboriosa, de este modo podemos resolver en primer lugar para un número reducido de ecuaciones que comprendan solamente los parámetros de la transformación y por otro lado resolver el resto de la incógnitas (coordenadas).

El juego de ecuaciones normales puede obtenerse fácilmente a partir de la expresión:

 $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{W} \mathbf{A}) \mathbf{X} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{W} \mathbf{L}$; llamando N= $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{W} \mathbf{A}) \mathbf{y} \mathbf{n} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{W} \mathbf{L}$ tendremos que el sistema de ecuaciones normales es $N \mathbf{X} = \mathbf{n}$

Se ha introducido la matriz de peso [W] en la expresión general de las ecuaciones normales, pero sin embargo, en el juego de ecuaciones normales de la tabla 3, se ha optado por introducir la matriz unitaria de pesos.

La solución del sistema de ecuaciones normales viene dado por la expresión en forma general:

$$X=N^{T} n = (A^{T} W A)^{-T} (A^{T} W L)$$

Esta técnica de ajuste del bloque planimétrico se conoce como el Método de Anblock (Van den Hout).

En la ecuación 3 se representa esquemáticamente el sistema de ecuaciones normales.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{12}^{\mathrm{T}} & \mathbf{N}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{x}_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{1} \\ \mathbf{n}_{2} \end{bmatrix}$$

Ecuación 3. Juego esquemático de ecuaciones normales planimétricas.

donde:

- x_1 son los parámetros incógnitas de la transformación de cada modelo.
- • x_2 son las coordenadas incógnitas de cada uno de los puntos de paso y enlace.
- n_1 y n_2 son los términos independientes ($n_2 = 0$).
- N₁₁ matriz hiperdiagonal que contiene submatrices de 4×4 cada una.

■ N₂₂ matriz diagonal.

• N_{12} submatrices que dan lugar a la correlación entre las incógnitas $x_1 y x_2$.

Ĩ٢				0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbf{L}_{\mathbf{X}_1}$	- y ₁	- x 2	- y ₂	- x ₃	- y ₃	0	0	0	0	[a]	X 100
		т.		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	у 1	- x ₁	y ₂	- x 2	y ₃	- x 3	0	0	0	0	b	Y ₁₀₀
	A	${}_{11}^{1}A_{1}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	- 1	0	- 1	0	- 1	0	0	0	0	0	T _x	$x_{100}X_{100} + y_{100}Y_{100}$
				0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	- 1	0	- 1	0	- 1	0	0	0	0	T _y	$- y_{100} X_{100} + x_{100} Y_{100}$
0	0	0	0					0	0	0	0	0	0	0	0	$+ x_1$	$-\mathbf{y}_1$	0	0	- x ₃	- y ₃	- x 4	$-y_4$	0	0	a	X ₁₀₁
0	0	0	0		A_{2}^{T}	A,	1	0	0	0	0	0	0	0	0	\mathbf{y}_1	$-\mathbf{x}_1$	0	0	y 3	- x 3	\mathbf{y}_4	$-\mathbf{x}_4$	0	0	b	Y ₁₀₁
0	0	0	0		2	1 2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	I -1	0	0	0	- 1	0	- 1	0	0	0	T _x	$x_{101}X_{101} + y_{101}Y_{101}$
0	0	0	0					0	0	0	0	0	0	0	0	0	- 1	0	0	0	- 1	0	- 1	0	0	T _y	$- y_{101} X_{101} + x_{101} Y_{101}$
0	0	0	0	0	0	0	0					0	0	0	0	0	0	- x 2	$-\mathbf{y}_2$	- x ₃	- y ₃	0	0	- x 5	- y ₅	a	X ₁₀₂
0	0	0	0	0	0	0	0		А	$_{31}^{T}A$	31	0	0	0	0	0	0	\mathbf{y}_2	- x 2	y 3	- x 3	0	0	y ₅	- x 5	b	Y ₁₀₂
0	0	0	0	0	0	0	0					0	0	0	0	0	0	- 1	0	- 1	0	0	0	- 1	0	T _x	$x_{102}X_{102} + y_{102}Y_{102}$
0	0	0	0	0	0	0	0					0	0	0	0	0	0	0	- 1	0	- 1	0	0	0	- 1	T _y	$-y_{102}X_{102} + x_{102}Y_{102}$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0					0	0	0	0	- x 3	$-y_3$	$- x_4$	$-y_4$	- x 5	- y ₅	a	 X ₁₀₃
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		А		41	0	0	0	0	y_3	- x 3	\mathbf{y}_4	- x 4	\mathbf{y}_{5}	- x 5	b	Y ₁₀₃
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			41	41	0	0	0	0	- 1	0	- 1	0	- 1	0	T _x	$x_{103}X_{103} + y_{103}Y_{103}$
0	0	0	0	0	0	0	_0	0	0	_0	0			_		<u>_¦°</u> -	0	0	0		1	_ 0	1	0	1_	T _Y	$- y_{103} X_{103} + x_{103} Y_{103}$
																12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X ₁	0
																0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	Y ₁	0
																0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	X ₂	0
									T							0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	Y ₂	0
								N								0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	X 3	0
									12							0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	Y ₃	0
																10	0	0	0	0	0	2	0	0	0	X4	0
																0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	Y ₄	0
																10	0	0	0	0	0	0	0	2	0	X 5	0
L																0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	Y ₅	0

Tabla 2. Juego de ecuaciones normales planimétricas (Anblock).

Puede ahora resolverse el sistema de ecuaciones más fácilmente, eliminando las incógnitas a partir de x_1 o de x_2 .

• Ecuaciones normales después de eliminar los elementos de la transformación x₁ en la ecuación 2.

$$N_{11}X_1 + N_{12}X_2 = n_1$$

 $N_{12}^TX_1 + N_{22}X_2 = n_2 = 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{1} &= \mathbf{N}_{11}^{-1} \big(\mathbf{n}_{1} - \mathbf{N}_{12} \mathbf{x}_{2} \big) \\ \mathbf{N}_{12}^{T} \mathbf{N}_{11}^{-1} \big(\mathbf{n}_{1} - \mathbf{N}_{12} \mathbf{x}_{2} \big) + \mathbf{N}_{22} \mathbf{x}_{2} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{N}_{12}^{T} \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{n}_{1} - \mathbf{N}_{12}^{T} \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12} \mathbf{x}_{2} + \mathbf{N}_{22} \mathbf{x}_{2} &= \mathbf{0} \\ \left(\mathbf{N}_{12}^{T} \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12} - \mathbf{N}_{22} \right) \mathbf{x}_{2} &= \mathbf{N}_{12}^{T} \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{n}_{1} \\ \mathbf{x}_{2} &= \left(\mathbf{N}_{12}^{T} \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12} - \mathbf{N}_{22} \right)^{-1} \mathbf{N}_{12}^{T} \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{n}_{1} \end{aligned}$$

Este método de reducción de las ecuaciones normales es particularmente conveniente para los ajustes del bloque con un gran número de modelos y un número pequeño de puntos de control menores.

 Ecuaciones normales después de eliminar las coordenadas x₂ de los puntos de paso y enlace en la ecuación 2.

$$N_{11}X_{1} + N_{12}X_{2} = n_{1}$$

$$N_{12}^{T}X_{1} + N_{22}X_{2} = n_{2} = 0$$

$$x_{2} = -N_{22}^{-1} (N_{12}^{T}X_{1})$$

$$N_{11}X_{1} - N_{12}N_{22}^{-1}N_{12}^{T}X_{1} = n_{1}$$

$$(N_{11} - N_{12}N_{22}^{-1}N_{12}^{T})X_{1} = n_{1}$$

$$x_{1} = (N_{11} - N_{12}N_{22}^{-1}N_{12}^{T})^{-1}n_{1}$$

Este método de reducción de las ecuaciones normales es particularmente conveniente para los ajustes del bloque con un número pequeño de modelos y gran número de puntos de paso y enlace.

Para mantener el esfuerzo de cálculo y los requerimientos de almacenaje para grandes bloques sin limites razonables, los programas de ordenador toman la ventaja en la solución de las ecuaciones normales vistas anteriormente.

Debido a las ventajas en el cálculo, el Anblock supone que las coordenadas de cada uno de los modelos están referidas a sus respectivos centro de gravedad (*Fig. 9*), reduciendo de esta forma el proceso de cálculo de las incógnitas, ya que en el juego de ecuaciones normales la submatriz N_{11} quedaría simplificada a una matriz diagonal.



Figura 9. Bloque de modelos con origen en el centro de gravedad.

Ejemplo. Realizar el ajuste planimétrico de un bloque fotogramétrico (Fig. 10) formado por dos pasadas y tres fotografías cada una de ellas. En la tabla 3 y 4 se dan las coordenadas modelo y coordenadas terreno de los puntos que van a intervenir en el ajuste.



Figura 10. Ejemplo de bloque fotogramétrico.

Mod. 1	x(m)	y(m)	Mod. 2	x(m)	y(m)	Mod. 3	x(m)	y(m)	Mod. 4	x(m)	y(m)
100	-9.313	44.258	1	5.791	19.986	2	9.324	37.32	3	4.348	38.641
1	51.423	18.706	101	29.69	48.904	3	51.255	38.073	4	57.379	36.644
2	-7.384	-40.839	3	-11.166	-43.059	102	29.943	-51.498	5	-9.848	-36.614
3	34.017	-41.968	4	42.525	-47.331	5	36.123	-36.464	103	55.901	-22.204

Tabla 3. Coordenadas modelo.

P.A.	X(m)	Y(m)
100	61058.366	60012.387
101	61396.747	60032.841
102	61157.476	59317.625
103	61443.128	59428.361

Tabla 4. Coordenadas terreno.

Solución.

Se va a resolver este ejercicio proponiendo dos sistema de ecuaciones, uno partiendo simplemente de las coordenadas modelo dadas en el enunciado y otro, reduciendo estas al centro de gravedad de cada uno de los modelos.

Coordenadas modelos referidas al centro de gravedad.

Mod. 1	x(m)	y(m)	Mod. 2	x(m)	y(m)	Mod. 3	x(m)	y(m)	Mod. 4	x(m)	y(m)
100	-26.499	49.219	1	-10.919	25.361	2	-22.337	40.462	3	-22.597	34.524
1	34.237	23.667	101	12.980	54.279	3	19.593	41.215	4	30.434	32.527
2	-24.570	-35.878	3	-27.876	-37.684	102	-1.718	-48.355	5	-36.793	-40.731
3	16.831	-37.007	4	25.815	-41.956	5	4.461	-33.321	103	28.956	-26.321

61058.366 60012.387	0	0	0	0	0	0	0	0	61396.747	60032.841	0	0	0	0	0	0	0	0	61157.476	59317.625	0	0	0	0	0	0	0	0	61443.128	59428.361
	,													II																
		ھ	م	ч Ч	Τų	æ	م	ч×	Тч	ø	م	Ч×	ЧЧ	ø	م	ř	ЧЧ	×	۲ı	X	Y_2	ĸ	ž	×	ž	ĸ	ų,			
00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	7	0	0
00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Ļ	0	0	0	0	0	4	0	0	0
00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Ļ	0	0	0	0
00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0
00	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	-	0	0	0	0	0	-	0	0	0	0	0	0
00	0	0	0	0	-	0	0	0	0	0	-	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	0	0
00	0	0	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
00	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
00	0	4	0	0	0	0	0	÷	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
00	Ļ	0	0	0	0	0	Ļ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	0	-	0	-	0	1
00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	0	-	0	-	0	-	0
00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-38.641	4.348	-36.644	57.379	36.614	-9.848	22.204	55.901
00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4.348	38.641	57.379	36.644	-9.848	-36.614	55.901	-22.204
00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	-	0		0	-	0	0	0	0	0	0	0	0
00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Ч	0		0	ч	0	ч	0	0	0	0	0	0	0	0	0
00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-37.32	9.324	38.073	51.255	51.498	29.943	36.464	36.123	0	0	0	0	0	0	0	0
00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9.324	37.32	1.255	8.073	9.943	1.498	86.123	36.464	0	0	0	0	0	0	0	0
00	0	0	0	0	0	0	0		0	ч	0	-	0	-	0	0	0	0	0	0 0	0	о О	0	0	0	0	0	0	0	0
00	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0		0	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
00	0	0	0	0	0	0	9.986	5.791	8.904	29.69	3.059	1.166	7.331	2.525	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
00	0	0	0	0	0	0	5.791 -1	9.986	29.69 -4	8.904	1.166 4	3.059 -1	2.525 4	7.331 4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 -	0	-	0	-		1	0	-	0	4		4	4	4		0		0		0		0		0	0					0
	-	0		0	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
~~	, ,	~		+	~	~	_	Ē	_	_	Ē	Ĩ	Ē	_	Ĩ	Ĩ	Ĩ	_	_	Ē	Ĩ	Ē	Ĩ	_	Ē	Ĩ	Ē	_	_	_
-44.258 -9.313	-18.706	51.423	40.835	-7.384	41.968	34.015	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-9.313 44.258	51.423	18.706	-7.384	-40.839	34.017	-41.968	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	。 一

Sistema de ecuaciones de observación indirecta

FOTOGRAMETRÍA III

normales.
÷
ecuaciones
g
Juego

208 739 1.7	-3261217	61058.366	60012.387	4758715.5	-1220171	61396.747	60032.841	-1223501	4925635.3	61157.476	5231T.625	2115125	468 6388	61443.128	59422.361	0	•	•	•	•	•	•	•	•	<u> </u>
Ľ		_	_	-		_	_		-	_				_											_
5	_	ř	À	ы	,,	ř	À	rd .	д	ř	Ļ	rd.	,	ř	Ļ	x	ž	Χ	Y1	ź	ζ,	×	Υ.	ž	ž.
Ŀ	•	•	•	•	•	•	•	ź	53	•		4	¤₽	•			•	0	0	•	0	0	•	0	~
			•					3 36.4	4 -36.1	Ļ		3 36.6	4 9.8	Ļ	-								•	~	•
_				_		_	_	0 -36.12	0 -36.46		_	4 9.84	9 -36.61		_			_	_				2		_
-	Ū	Ī	-	47.333	-42.52	Ū	7	Ī	-	-	-	-36.64	-57.379	Ĩ	7		Ĩ	Ū	-	Ū	Ĩ	Ĩ		Ĩ	-
•	°	•	•	-42.525	-47.331	4	•	•	•	•	•	-57.379	36.64	÷			•	•	•	°	•	63	•	•	•
41.963	-34.017	•	Ļ	43.059	391.11	•	Ļ	-38.073	-51.255	•	Ļ	-38.641	-4.348	•			•	•	•	•	4	•	•	•	•
34.017	41.968	7	•	991-11	43.05.9	÷	•	51.255	38.073	÷	•	-4.348	38.641	7	-		•	•	•	4	•	•	•	•	•
H0.239 -	7.384 -	•	Ļ	•	•	•	•	-37.32 -	-9.324	•	÷	•	•	•	•	¦°	•	•	63	•	•	•	•	•	•
T.384 ·	0.23.9	7	۰	•	۰	•	•	9.324	37.32	÷	•	۰	۰	•	•	•	•	63	•	•	•	•	•	•	•
8.706	1.423 -4	•	÷	9.986	5.791	۰	7	•	۰	•	•	۰	۰	•	•	•	6)	•	۰	•	•	•	۰	•	•
1.423 -1	8.706 -5	7	•	5.791 -1	. 926.0	÷	•	•	•	•	•	•	•	•	•	~	•	•	•	۰	•	•	•	•	•
051					10			5			- 5	467	7.78		-+-					5			÷		
•	•	•	۰	•	۰	۰	•	•	۰	•	•	1.73 16	.467 10	4	•	•	•	•	۰	Ļ	•	Ļ	۰	4	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0	02.67 -1	6.467	07.78		•	•	•	3.641	-4.348	6.644	17.379	6.614	9.848
۰	•	•	0	•	0	•	•	•	0	•	•	02.67	0 112	07.78 -1	6.467	-	•	•	•	4.348 3	8.641	676.7	6.644 -	9.848 -1	6.614
	•		•	•	•	•		6	2	•	4	0 112	•	-	-			•	Ļ		 	0 5	0 12		- -
								-12.5	126.6																
•	•	•	•	•	•	•	•	126.645	12.569	4	•	•	•	•	-		•	÷	•	÷	•	•	•	Ļ	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	1739.46	12.569	126.645	•	•	•	•		•	37.32	-9.324	38.073	-51.255	•	•	-36.464	-36.123
۰	•	•	•	•	•	•	•	739.47	0	126.64	-12.569	•	•	•	•		•	-9.324	-37.32	-51.255	-38.073	•	•	-36.123	36.464
•	•	•	•	21.5	6.84	•	4	0	•	•	•	•	•	•	-		Ļ	•	•	•	÷	•	Ļ	•	•
۰	•	•	•	56.84	21.5 6	4	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	÷	•	÷	•	•	•
۰	•	•	•	•	73.3.45	21.5	66.34	•	•	•	•	•	•	•	•	19.986	-5.791	•	•	43.059	991.11	47.331	42.525	•	•
۰	•	•	•	9733.43	0	66.34	-21.5	•	•	•	•	•	•	•	0	5.791	-19.98 <i>6</i>	•	•	- 991'11	43.059	-42.525 -	47.331 -	•	•
19.843	68.743	•	4	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0		י	•	Ļ	•	.	•	•	۰	•
8.743 -	9.843	4	۰	•	•	۰	•	•	۰	•	•	۰	۰	•	•	- -	•	7	۰	7	•	•	۰	•	•
19 0	68 0.55 15	19.843	68.743	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	18.706	51.423	40.23.9	7.384	41.968	34.017	•	•	•	•
9680.55	6 0	68.743	-19.843	•	0	•	•	•	0	0	•	•	0	•	0	-51.423	-13.706	7.384 -	40.339	-34.017 -	41.968	•	۰	•	•

Solución del sistema de ecuaciones.

Parámetros de los modelos

a = 4.015764	
b = 0.1474745	
$T_x = 61102.31179$	
$T_{\rm Y} = 59836.04783$	
a = 3.8835652	
b = 0.0768352	
$T_{\rm x} = 61285\ 17061$	
$T_{\rm v} = 59840.65791$	
a = 3.9702863	
h = -0.0335056	
$T_{\rm v} = 61040\ 36798$	
$T_x = 59523 \ 10708$	
a = 3.941971	
h = -0.0858263	
$T_{\rm w} = 61224\ 63562$	
$T_X = 50520.63217$	
$1\gamma = 33320.03217$	

Coordenadas de los puntos de control menor

X_1	=	61306.090
Y_1	=	59918.735
X_2	=	61078.659
Y_2	=	59670.962
X3	=	61245.113
Y ₃	=	59672.560
X_4	=	61453.961
Y_4	=	59660.135
X_5	=	61182.619
X_5	=	59377.135

En las siguientes páginas se muestran los sistemas de ecuaciones utilizados para resolver el ejemplo utilizando las coordenadas modelo referidas a sus respectivos centros de gravedad. A continuación se dan las soluciones de dicho sistema.

Solución del sistema de ecuaciones.

Parámetros de los modelos

a = 4.0157315b = 0.1474756 $T_{\rm X} = 61172.05716$ $T_{\rm Y} = 59818.66228$ a = 3.8835366 b = 0.0768354 $T_x = 61350.47742$ $T_{\rm Y} = 59821.06923$ a = 3.9703152 b = -0.0335079 $T_X = 61165.96652$ $T_{\rm Y} = 59509.57155$ a = 3.9419689 b = -0.0858194 $T_X = 61331.20454$ $T_{\rm Y} = 59534.54891$

Coordenadas de los puntos de control menor

$X_1 = 61306.089$
$Y_1 = 59918.736$
$X_2 = 61078.659$
$Y_2 = 59670.964$
$X_3 = 61245.113$
$Y_3 = 59672.563$
$X_4 = 61453.960$
$Y_4 = 59660.137$
$X_5 = 61182.617$
$X_5 = 59377.132$

61058.366	60012.387	0	0	0	0	0	0	0	0	61396.747	60032.841	0	0	0	0	0	0	0	0	61157.476	59317.625	0	0	0	0	0	0	0	0	61443.128	59428.361
			_												II																
			ے	م	Тх	۲. ۲	ൽ	م	Ч×	ЧЧ	æ	م	Ч×	ΤΥ	ø	م	ч×	ΤΥ	×	Υı	×	Y_2	ĸ	Ϋ́	×	Υ,	Ř	Y,			
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	4	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	÷	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Ļ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	÷	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	Ļ	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	÷	0	0	0	0	0	÷	0	0	0	0	0	Ļ	0	0	0	0	0	÷	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	4	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	7	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	0	-	0	-	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0		0	-	0	Ч	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	34.524	22.596	32.527	30.433	40.731	36.793	26.321	28.956
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	22.597 -	34.524 -	30.433 -	32.527	36.793	40.731 -	28.956	26.321
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Ч	0	Ч	0	Ч	0	ч	0	0	0	0	0	۲ 0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ч	0	Ч	0	ч	0		0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10.462	12.337	H.215	9.593	1 8.355	-1.718	13.321	4.461	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	22.337 -	40.462	19.593 J	41.215	-1.718 4	\$335	4.461	33.321	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	0	-	0	-	0	1	0	0	0	0	0	۲ 0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-	0	-	0	-	0	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	5.361	0.919	4.278	2.980	37.68	27.87	1.956	5.814	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1.911 -2	5.361 -1	2.980.5	1.278 1	.876	1.684	5.815 4	956 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0 -1(5	1 0	ч О	0.2	μ	64 0	0 (4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	-	0	-	0	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9.219	5.498	3.666	4.237	5.878	-24.5	7.006	5.831	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-26.498 -4	49.21 -2(34.237 -2	23.666 3	-24.5 3	-35.878	16.831 3	-37.006 1t	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Sistema de ecuaciones de observación indirecta (coordenadas modelo reducidos al centroide)

.

[1335770.141]	-4595493.958	61058.366	60012.387	4055458.629	-2553309.608	61396.747	60032.841	-2973413.823	2255404.222	61157.476	59317.625	214933.526	3338064.280	61443.128	59423.361	•	0	0	0	0	0	0	0	0	_ _
5	л	ч	ŕ	rd	д	г.	Ĥ	rd	,0	н ^н	Ĥ	11 14	д	г.	Å	×	Y,	×	Y,	×	Υ,	×	Υ,	×	×
<u> </u>	•	•	•	•	•	•	•	322	462	•	7	Ĩ	â	•	7	!°	•	•	•	•	•	•	•	•	~
•	•	•	•	•	•	•	•	-4.461 33.	33.322 -4	Ļ	•	36.793 40.	40.751 36.	ŗ	•		•	•	•	•	•	•	•	e)	•
•	•	•	•	41.956	25.815	•	÷	•	0	•	•	32.527	30.433 -	•	7	¦-	•	•	•	•	•	۰	63	۰	•
•	•	•	•	25.815	41.956	7	•	•	•	•	•	30.433	32.527	7	•		•	•	•	•	•	5	•	•	•
37.007	16331	•	÷	37.684	27.876	•	÷	41.215	19.593	•	ŗ	- 34.524	22.596	•	. .	¦-	•	۰	•	•	4	•	•	•	•
-16.331	-37.007 -	ŗ	•	27.876	-37.684	Ļ	•	. 265.61-	41.215	7	•	22.596	34.524	÷	•	¦-	•	•	•	4	•	•	•	•	•
35.879	24.57	•	÷	•	0	•	•	-40.462	22.337	•	Ļ	•	•	•	•		•	•	63	•	•	0	•	•	•
24.570	-35.879	÷	•	•	•	•	•	22.337	40.462	7	•	•	•	•	•	¦-	•	6)	•	•	•	•	•	•	•
-23.667	-34.237	•	7	-25.361	910.01	•	7	•	•	•	•	•	•	•	•	¦÷	6)	•	•	•	•	•	•	•	•
-34.237	23.667	7	•	10.919	25.361		•	•	•	•	•	•	•	•	•	~> 	•	•	•	•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	4	 	•	•	•	•	7	•	7	•	7
•	•	•	۰	•	•	•	•	۰	•	•	۰	•	۰	4	•	¦°	•	۰	•	7	•	Ļ	•	÷	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	8230.859	•	•		•	•	•	34.5247	22.5967	32.5276	-30.4339	-40.7312	36.7932
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	\$230.859	•	•	•		•	•	•	22.596T	-34.5247	-30.4339	-32.5276	36.7932	40.7512
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	4	•	•	•	•	ŀ	•	•	÷	•	÷	•	•	•	7
•	•	•	•	•	•	•	•	۰	•	4	•	•	•	•	•	 0 	•	÷	•	7	•	•	•	÷	•
•	•	•	•	•	•	•	•	•	7690.213	•	0	•	•	•	•	- -	•	40.462	22.337	41.215	-19.594	0	•	-33.322	-4.462
•	•	•	•	•	•	•	•	690.213	•	•	•	•	•	•	•		•	22.337	-40.462	-19.594	-41.215	•	•	-4.462	33.322
•	•	•	•	•	•	•	4	•	•	•	•	•	•	•	•	¦-	÷	•	•	•	7	•	7	•	•
•	•	•	•	•	•	4	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	7	•	÷	•	•	•
•	•	0	•	•	500.975	•	•	•	0	•	0	•	0	•	•	25.361	10.919	•	•	-37.684	27.876	-41.956	-25.814	0	•
•	•	•	•	8500.975	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	10.919	-25.361	•	•	27.876	37.684	-25.814	41.956	•	•
•	•	•	4	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	۰	¦°	÷	•	÷	•	÷	•	•	•	•
•	•	4	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	۰	•	0	7	•	÷	•	÷	•	•	•	•	•
•	3400.722	•	•	•	0	•	•	•	•	•	0	•	0	•	•	23.667	-34.237	-35.879	24.570	-37.007	-16331	0	•	0	•
8400.732	10	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	-34.237	-23.667	24.570	35.879	-16.831	37.007	•	•	•	•

Juego de ecuaciones de normales.

4.4.2. Ajuste altimétrico.

Es a partir de ahora cuando empezarán a formar parte del cálculo las coordenadas de los centros de proyección obtenidas durante la fase instrumental (orientación relativa). Se va a partir del bloque visto anteriormente en el ajuste planimétrico (*Fig. 9*), donde se han añadido cada uno de los centros de proyección de los modelos (10, 11, 12, 13, 14 y 15).



Figura 9. Bloque fotogramétrico de cuatro modelos objeto de ajuste altimétrico.

En el ajuste y compensación altimétrico se determinarán el resto de parámetros de la orientación absoluta restantes, es decir, Ω , Φ , T_Z para cada uno de los modelos.

Para empezar se transformarán todas las coordenadas de todos los puntos distribuidos sobre los modelos (incluidos los centros de proyección) con los parámetros obtenidos en la compensación planimétrica.

$$\begin{split} x_{ij} &= a_{j} x'_{ij} - b_{j} y'_{ij} + T_{x} \\ y_{ij} &= b_{j} x'_{ij} + a_{j} y'_{ij} + T_{y} \\ z_{ij} &= \lambda_{j} \; z_{ij} + T_{z} = z_{ij} \sqrt{\left(b_{j}^{2} + a_{j}^{2}\right)} + T_{z} \end{split}$$

Normalmente se suelen reducir las coordenadas modelo al centro de gravedad de cada uno de los modelos, de tal forma que disminuyen los cálculos del sistema de ecuaciones, tal y como se ha visto en el ajuste anterior. En este caso las coordenadas transformadas se obtendrán a partir de las expresiones:

$$\begin{split} x_{ij} &= a_{j} x_{ij}' - b_{j} y_{ij}' \\ y_{ij} &= b_{j} x_{ij}' + a_{j} y_{ij}' \\ z_{ij} &= \lambda_{j} \ z_{ij} = z_{ij} \sqrt{\left(b_{j}^{2} + a_{j}^{2}\right)} \end{split}$$

Para plantear las ecuaciones en este tipo de ajuste habrá que partir de una transformación tridimensional conforme de coordenadas. En este caso se propone partir de dicha transformación

expresando los ángulos de rotación en función de ángulos pequeños (igualmente se podría por ejemplo haber linealizado las expresiones).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & -\Delta \mathbf{K} & \Delta \Phi \\ \Delta \mathbf{K} & 1 & -\Delta \Omega \\ -\Delta \Phi & \Delta \Omega & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{T}_{\mathbf{y}} \\ \mathbf{T}_{\mathbf{z}} \end{bmatrix}$$

Al haberse determinado de las siete incógnitas (λ , Ω , Φ , K, T_X, T_Y T_Z) de la orientación absoluta, cuatro en el ajuste altimétrico (λ , K, T_X, T_Y), la expresión anterior quedará reducida a la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta \Phi \\ 0 & 1 & -\Delta \Omega \\ -\Delta \Phi & \Delta \Omega & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{T}_{\mathbf{z}} \end{bmatrix}$$

Para el caso de un punto de apoyo i del modelo j la ecuación sería del tipo:

$$\begin{bmatrix} y_{ij} & -x_{ij} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \Omega \\ \Delta \Phi \\ T_z \end{bmatrix}_j = Z_i - Z_i$$

Para un punto de control menor i del modelo j (las coordenadas planimétricas son conocidas del ajuste planimétrico) la ecuación sería del tipo:

$$\begin{bmatrix} y_{ij} & -x_{ij} & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \Omega \\ \Delta \Phi \\ T_z \\ Z \end{bmatrix}_{i} = -z_{i}$$

Para los centros de proyección, hay que recordar que no se tuvieron en cuenta durante el ajuste planimétrico, con lo cual las ecuaciones que se formaría serían del tipo:

$$\begin{bmatrix} 0 & z_{ij} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -z_{ij} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ y_{ij} & -x_{ij} & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \Omega \\ \Delta \Phi \\ T_z \\ X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_j = -\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_i$$

Puede observarse que hay tres incógnitas por cada modelo Ω , Φ , T_Z , más la coordenada altimétrica de cada uno de los puntos que intervino en el ajuste altimétrico, más las coordenadas planimétricas y

altimétricas de los centros de proyección.. Para el caso de nuestro ejemplo tenemos:

Número total de ecuaciones = $(4 \times 1 \times 4) + (2 \times 3 \times 4) = 40$ Número total de incógnitas = $(3 \times 4) + (1 \times 5) + (3 \times 6) = 35$

En la tabla siguiente se muestra el juego de ecuaciones de observación altimétrica.

y ₁₀₀	-x ₁₀₀	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		(Z-z) ₁₀₀
y1	$-\mathbf{x}_1$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	г	-Z1
y ₂	-x ₂	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\Delta\Omega$	-z ₂
y ₃	-x ₃	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\Delta \Phi$	-Z3
0	z_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{Z}	-x ₁₀
-Z ₁₀	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\Delta \Omega$	-y ₁₀
y ₁₀	$-x_{10}$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\Delta \Phi$	-Z ₁₀
0	z_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	T_{Z}	-x ₁₁
-z ₁₁	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ΔΩ	-y ₁₁
y11	-X ₁₁	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\Delta \Phi$	-Z ₁₁
0	0	0	y_1	-x ₁	1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Tz	-Z1
0	0	0	y ₁₀₁	-x ₁₀₁	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ΔΩ	$(Z-z)_{101}$
0	0	0	y ₃	-X3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ΔΦ	-Z3
0	0	0	y4	-x ₄	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Tz	-Z4
0	0	0	0	Z ₁₁	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Z_1	-x ₁₁
0	0	0	-Z11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Z_2	-y ₁₁
0	0	0	y11	-x ₁₁	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Z ₃	-Z11
0	0	0	0	Z ₁₂	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Z_4	$-x_{12}$
0	0	0	-Z ₁₂	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Z5 V	-y ₁₂
0	0	0	y ₁₂	-x ₁₂	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	\mathbf{X}_{10}	-Z ₁₂
0	0	0	0	0	0	y ₂	-x ₂	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Υ ₁₀	-Z ₂
0	0	0	0	0	0	y ₃	-X3	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	\mathbf{Z}_{10} \mathbf{V}	-Z ₃
0	0	0	0	0	0	y102	-X ₁₀₂	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	\mathbf{X}_{11} V	(Z-Z) ₁₀₂
0	0	0	0	0	0	y5	-A5	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1 11 7 11	-Z5
0	0	0	0	0	0	7	213	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	\mathbf{x}_{11}	-X ₁₃
0	0	0	0	0	0	-Z13		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	V	-y13
0	0	0	0	0	0	y13 0	-A13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	7 12 Z12	-Z ₁₃
0	Ő	0	0	0	0	-Z14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	X12	-A14
0	Ő	0	Ő	0	0	V14	-X 14	1	0	Ő	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	Y12	-y14 -714
0	0	Õ	0	0	0	0	0	0	V3	-X 3	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Z13	-72
0	0	0	0	0	0	0	0	0	V4	-X4	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X ₁₄	-74
0	0	0	0	0	0	0	0	0	¥5	-X5	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Y ₁₄	-Z5
0	0	0	0	0	0	0	0	0	¥103	-X103	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Z ₁₄	(Z-z)103
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Z ₁₄	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	X ₁₅	-X143
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-z ₁₄	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	Y ₁₅	-y ₁₄
0	0	0	0	0	0	0	0	0	y14	-x ₁₄	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	Z ₁₅	-Z ₁₄
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	Z 15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	_	-X ₁₅
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-Z ₁₅	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0		-y ₁₅
0	0	0	0	0	0	0	0	0	y 15	- x ₁₅	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1		-Z ₁₅
-													[A]																	[]	X]	=	[[_]	

Tabla 5. Juego de ecuaciones de observación altimétrica.

Las ecuaciones normales vendrán dadas por NX = n, dando lugar a un sistema de la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{12}^{\mathrm{T}} & \mathbf{N}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{x}_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{1} \\ \mathbf{n}_{2} \end{bmatrix}$$

Ecuación 4. Juego esquemático de ecuaciones normales altimétricas.

Una vez planteado el sistema de ecuaciones normales, el siguiente paso será resolver las incógnitas del ajuste altimétrico. Para ello se obtendrá separadamente tal y como se explicó en el ajuste planimétrico los parámetros de la transformación (x_1) y las coordenadas de los puntos (x_2) de enlace, paso y centros de proyección por medio de las ecuaciones:

$$N_{11}X_1 + N_{12}X_2 = n_1$$

 $N_{12}^TX_1 + N_{22}X_2 = n_2$

La solución final se obtendrá seguramente repitiendo varias veces el proceso por medio de un proceso iterativo, ya que las ecuaciones de partida *(3-D conforme)* se han considerado los ángulos de rotación aproximados.

4.4.3. Ajuste espacial

En este método cada modelo o sección se define normalmente mediante las coordenadas de los puntos de las cuatro esquinas además de los dos centros de proyección. Para cada modelo, este conjunto de coordenadas locales (modelo) puede tener un origen bien analógico o bien analítico.

En el caso analógico los valores de los puntos de paso y enlace se obtienen directamente midiendo en el espacio del modelo, y las coordenadas de los dos centros proyección se obtienen separadamente a partir de un conjunto diferente de ecuaciones de observaciones como vimos en el apartado 3. En el caso del procedimiento analítico, todas las coordenadas requeridas pueden obtenerse mediante una aplicación de la condición de coplaneidad o la de colineación; las coordenadas del centro proyección son una parte integral de ese conjunto.

Son los valores del centro perspectivo los que posibilitan una conexión consistente de modelos para hacerse a lo largo de la longitud de las pasadas. Al usar fotogramas con un recubrimiento transversal del orden del 25% las conexiones entre pasadas no suelen ser muy buenas, por eso, cuando se desean resultados de gran precisión se aumenta el recubrimiento transversal al 60%. En estos caso es posible formar aproximadamente, un bloque tridimensional homogéneo en la orientación relativa sin la necesidad de puntos de apoyos. Por otra parte, utilizando el recubrimiento más pequeño (25%) de los normales, se requerirá un número mínimo de puntos de apoyo bien distribuidos para llegar a los mismos resultados. La distribución del control altimétrico es de particular importancia y se necesita principalmente para controlar el efecto del doble sumatorio de los errores de transmisión sobre los valores de las altitudes de los puntos *(coordenada Z)*. Por tanto suponemos que se dispone de apoyo suficiente para asegurar que la distribución de los valores de las coordenadas modelo de cada punto de enlace es del tipo aleatoria y de pequeña magnitud en el bloque.

Para obtener el mejor conjunto de coordenadas para el bloque, cada modelo está sujeto a una transformación tridimensional de semejanza de siete parámetros, tal que para el punto i en el modelo j tendremos:

X				T _x	
Y	$=\lambda_{j}$ [R	$\begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} y_i$	+	T _y	
Z	i	Zi	j	T _z	j

Estas ecuaciones nos permiten definir la función F que integra los siete parámetros de la transformación (λ , Ω , Φ , K, T_X, T_Y, T_Z) con las observaciones (x_i, y_i, z_i)_j.

$$\begin{bmatrix} F\mathbf{x} \\ F\mathbf{y} \\ F\mathbf{z} \end{bmatrix} = \lambda_{j} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \end{bmatrix}_{j} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i} \\ \mathbf{y}_{i} \\ \mathbf{z}_{i} \end{bmatrix}_{j} + \begin{bmatrix} T_{\mathbf{x}} \\ T_{\mathbf{y}} \\ T_{\mathbf{z}} \end{bmatrix}_{j} - \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix}_{i}$$

Debido a que dichas ecuaciones no son lineales, se tienen que someter a un proceso de linealización, pudiendo escribir cada ecuación de la forma siguiente:

$$\begin{split} Fx &= 0 = \left(Fx\right)_{0} - \left(\frac{\partial Fx}{\partial X}\right)_{0} dX + \left(\frac{\partial Fx}{\partial \lambda}\right)_{0} d\lambda + \left(\frac{\partial Fx}{\partial \Omega}\right)_{0} d\Omega + \left(\frac{\partial Fx}{\partial \Phi}\right)_{0} d\Phi + \\ &+ \left(\frac{\partial Fx}{\partial K}\right)_{0} dK + \left(\frac{\partial Fx}{\partial T_{X}}\right)_{0} dT_{X} + \left(\frac{\partial Fx}{\partial T_{Y}}\right)_{0} dT_{Y} + \left(\frac{\partial Fx}{\partial T_{Z}}\right)_{0} dT_{Z} - \left(\frac{\partial Fx}{\partial X}\right)_{0} dX \\ Fy &= 0 = \left(Fy\right)_{0} - \left(\frac{\partial Fy}{\partial X}\right)_{0} dX + \left(\frac{\partial Fy}{\partial \lambda}\right)_{0} d\lambda + \left(\frac{\partial Fy}{\partial \Omega}\right)_{0} d\Omega + \left(\frac{\partial Fy}{\partial \Phi}\right)_{0} d\Phi + \\ &+ \left(\frac{\partial Fy}{\partial K}\right)_{0} dK + \left(\frac{\partial Fy}{\partial T_{X}}\right)_{0} dT_{X} + \left(\frac{\partial Fy}{\partial T_{Y}}\right)_{0} dT_{Y} + \left(\frac{\partial Fy}{\partial T_{Z}}\right)_{0} dT_{Z} - \left(\frac{\partial Fy}{\partial Y}\right)_{0} dY \\ Fz &= 0 = \left(Fz\right)_{0} - \left(\frac{\partial Fz}{\partial X}\right)_{0} dX + \left(\frac{\partial Fz}{\partial \lambda}\right)_{0} d\lambda + \left(\frac{\partial Fz}{\partial \Omega}\right)_{0} d\Omega + \left(\frac{\partial Fz}{\partial \Phi}\right)_{0} d\Phi + \\ &+ \left(\frac{\partial Fz}{\partial K}\right)_{0} dK + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{X}}\right)_{0} dX + \left(\frac{\partial Fz}{\partial \lambda}\right)_{0} d\lambda + \left(\frac{\partial Fz}{\partial \Omega}\right)_{0} d\Omega + \left(\frac{\partial Fz}{\partial \Phi}\right)_{0} d\Phi + \\ &+ \left(\frac{\partial Fz}{\partial K}\right)_{0} dK + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{X}}\right)_{0} dT_{X} + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{Y}}\right)_{0} dT_{Y} + \left(\frac{\partial Fz}{\partial \Omega}\right)_{0} d\Omega + \left(\frac{\partial Fz}{\partial \Phi}\right)_{0} d\Phi + \\ &+ \left(\frac{\partial Fz}{\partial K}\right)_{0} dK + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{X}}\right)_{0} dT_{X} + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{Y}}\right)_{0} dT_{Y} + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{Z}}\right)_{0} dT_{Z} - \left(\frac{\partial Fz}{\partial Z}\right)_{0} dZ + \left(\frac{\partial Fz}{\partial \Phi}\right)_{0} d\Phi + \\ &+ \left(\frac{\partial Fz}{\partial K}\right)_{0} dK + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{X}}\right)_{0} dT_{X} + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{Y}}\right)_{0} dT_{Y} + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{Z}}\right)_{0} dT_{Z} - \left(\frac{\partial Fz}{\partial Z}\right)_{0} dZ + \left(\frac{\partial Fz}{\partial \Phi}\right)_{0} d\Phi + \\ &+ \left(\frac{\partial Fz}{\partial K}\right)_{0} dK + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{X}}\right)_{0} dT_{X} + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{Y}}\right)_{0} dT_{Y} + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{Z}}\right)_{0} dT_{Z} - \left(\frac{\partial Fz}{\partial Z}\right)_{0} dZ + \left(\frac{\partial Fz}{\partial \Phi}\right)_{0} dZ + \left(\frac{$$

si llamamos $\mathbf{r}_{11} = \left(\frac{\partial Fx}{\partial \lambda}\right), \mathbf{r}_{12} = \left(\frac{\partial Fx}{\partial \Omega}\right), \dots, \mathbf{r}_{21} = \left(\frac{\partial Fy}{\partial \lambda}\right), \mathbf{r}_{22} = \left(\frac{\partial Fy}{\partial \Omega}\right), \dots, \mathbf{r}_{31} = \left(\frac{\partial Fz}{\partial \lambda}\right), \mathbf{r}_{32} = \left(\frac{\partial Fz}{\partial \Omega}\right), \dots, (derivadas parciales de las funciones respecto de los parámetros incógnitas – ver Apéndice B-), obtendremos$

$$\begin{aligned} Fx &= r_{11} d\lambda + r_{12} d\Omega + r_{13} d\Phi + r_{14} dK + r_{15} dT_{X} + r_{16} dT_{Y} + r_{17} dT_{Z} - dX + (Fx)_{0} = 0 \\ Fy &= r_{21} d\lambda + r_{22} d\Omega + r_{23} d\Phi + r_{24} dK + r_{25} dT_{X} + r_{26} dT_{Y} + r_{27} dT_{Z} - dY + (Fy)_{0} = 0 \\ Fz &= r_{31} d\lambda + r_{32} d\Omega + r_{33} d\Phi + r_{34} dK + r_{35} dT_{X} + r_{36} dT_{Y} + r_{37} dT_{Z} - dZ + (Fz)_{0} = 0 \end{aligned}$$

Cada ecuación dará lugar tres funciones separadas (Fx, Fy, Fz). De aquí puede escribirse el juego de ecuaciones de observación lineal de la siguiente forma:

AX-L=V

que estarán formadas por los tres vectores definidos anteriormente (Fx, Fy, Fz).

Como estimaciones iniciales de los parámetros podemos tomar para las tres rotaciones valores de cero en cada caso (en el supuesto de haber volado bien, fotografía aérea casi vertical). Para el factor escala puede asignarse el valor unidad, ya que los modelos se han unido para formar un bloque aproximadamente homogéneo y por la misma razón inicial se estima para los valores iniciales de las traslaciones de los modelos el valor cero ($X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$).

En el caso de puntos de enlace y paso de coordenadas desconocidas, estos valores aproximados (X_a , Y_a , Z_a) pueden tomarse por ejemplo a partir del gráfico de vuelo si es de suficiente exactitud, de un mosaico semicontrolado de fotogramas o por cualquier otro procedimiento de cálculo analítico. Lo más recomendable sería realizar un ajuste polinómico previo para determinar estos valores aproximados.

$$\begin{bmatrix} (Fx)_{0} \\ (Fy)_{0} \\ (Fz)_{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X)_{0 ij} - X_{aj} \\ (Y)_{0 ij} - Y_{j} \\ (Z)_{0 ij} - Z_{aj} \end{bmatrix}$$

Para un punto de apoyo las ecuaciones a utilizar serían de la forma:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} & r_{17} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} & r_{27} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} & r_{36} & r_{37} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\lambda \\ d\Omega \\ d\Phi \\ dK \\ dT_x \\ dT_y \\ dT_z \end{bmatrix}_j$$

En el caso de un punto de control menor, las coordenadas de tal punto introducen tres incógnitas adicionales en el sistema (dX, dY, dZ), las cuales serán las correcciones a efectuar a las coordenadas tomadas como aproximadas.

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} & r_{17} & -1 & 0 & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} & r_{27} & 0 & -1 & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} & r_{36} & r_{37} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\lambda \\ d\Omega \\ d\Phi \\ dK \\ dT_x \\ dT_y \\ dT_z \\ dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix}_{j} = \begin{bmatrix} -(Fx)_0 \\ -(Fy)_0 \\ -(Fy)_0 \end{bmatrix}$$

Para el caso del ejemplo propuesto en ajustes anteriores (*Fig. 8*) hay siete incógnitas por cada modelo λ , Ω , Φ , *K*, T_X , T_Y , T_Z , más la coordenada (*X*, *Y*, *Z*) cada uno de los puntos de control menores y centros de proyección.. En este caso tendremos:

Número total de ecuaciones =
$$(6\times3\times4)$$
= 72
Número total de incógnitas = $(7\times4) + (3\times5) + (3\times6) = 61$

FOTOGRAMETRÍA III

Para obtener la solución final de los parámetros es necesario realizar un proceso de cálculo iterativo, es decir, se normaliza el sistema de ecuaciones *(juego de ecuaciones normalizadas)* y se resuelven por un lado los parámetros y por otro las coordenadas adicionales de los puntos. La solución obtenida dará lugar a unas nuevas estimaciones (correcciones a efectuar a las incógnitas) para las incógnitas del tipo:

$$\begin{split} \lambda &= \lambda_a + d\lambda & T_X = T_{X_a} + dT_X & X = X_a + dX \\ \Omega &= \Omega_a + d\Omega & T_Y = T_{Y_a} + dT_Y & Y = Y_a + dY \\ \Phi &= \Phi_a + d\Phi & T_Z = T_{Z_a} + dT_Z & Z = Z_a + dZ \\ K &= K_a + dK \end{split}$$

hay que tener en cuenta las estimaciones iniciales ($\lambda=1$, $\Omega=\Phi=K=0$, $X_0=Y_0=Z_0=0$, $X=X_a$, $Y=Y_a$, $Z=Z_a$,).

Calculados los nuevos valores de las incógnitas se vuelve a plantear un nuevo sistema de ecuaciones con los nuevos parámetros y coordenadas obtenidos, procediéndose a resolver este. Se volverán a obtener nuevas correcciones, calculándose los nuevos parámetros y coordenadas. El proceso se repite tantas veces como se necesario hasta alcanzar una solución aceptable, donde la influencia de los parámetros sea despreciable (se detendrá el proceso iterativo cuando el valor de los parámetros de transformación obtenidos en la última iteración apenas varíe con la anterior calculada, según los criterios que se establezcan.

Las derivadas parciales vistas anteriormente, pueden expresarse en función de la matriz de rotación aproximada *(ver Apéndice B)*, pudiendo expresar el sistema de ecuaciones a que daría lugar un punto de apoyo como:

$$\begin{bmatrix} x_{ij} & 0 & z_{ij} & -y_{ij} & 1 & 0 & 0 \\ y_{ij} & -z_{ij} & 0 & x_{ij} & 0 & 1 & 0 \\ z_{ij} & y_{ij} & -x_{ij} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\lambda \\ d\Omega \\ d\Phi \\ dK \\ dT_x \\ dT_z \\ dT_z \end{bmatrix}_{j} = \begin{bmatrix} -(Fx)_0 \\ -(Fy)_0 \\ -(Fz)_0 \end{bmatrix}$$

Un punto de control menor daría lugar al siguiente juego de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x_{ij} & 0 & z_{ij} & -y_{ij} & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ y_{ij} & -z_{ij} & 0 & x_{ij} & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ z_{ij} & y_{ij} & -x_{ij} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\lambda \\ d\Omega \\ d\Phi \\ dK \\ dT_x \\ dT_y \\ dT_z \\ dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix}_i$$

Al igual que en el caso anterior, una vez formado el juego de ecuaciones de observación, este puede ser normalizado y resuelto para las incógnitas. El resultado nos proporcionará un segundo juego de estimaciones para las incógnitas de tipo:

$$\begin{split} \lambda &= \lambda_a + d\lambda & T_X = T_{X_a} + dT_X & X = X_a + dX \\ \Omega &= \Omega_a + d\Omega & T_Y = T_{Y_a} + dT_Y & Y = Y_a + dY \\ \Phi &= \Phi_a + d\Phi & T_Z = T_{Z_a} + dT_Z & Z = Z_a + dZ \\ K &= K_a + dK \end{split}$$

La solución final se obtendrá mediante cálculo reiterativo, es decir, con estos valores renovados de los parámetros de transformación, se puede calcular nuevos juegos de coordenadas para cada punto de enlace en cada modelo e introducirlas en la ecuación indicadas anteriormente. Ahora dará comienzo la segunda iteración, formando un nuevo sistema de ecuaciones y continuará el proceso calculándose nuevos valores de las estimaciones de los parámetros que irán decreciendo en magnitud a medida que progresan las reiteraciones. De una forma práctica se pueden parar las iteraciones cuando las discrepancias en los puntos de enlace alcanzan unos valores lo suficientemente pequeños o que sean menores que unos valores estipulados de antemano. Hasta cierto punto, el número de iteraciones necesarias dependerá del número de puntos de apoyo disponible y su situación en el bloque. En un bloque bien apoyado se necesitan pocas iteraciones para llegar a una solución correcta.

Para la formación y solución de las ecuaciones normales se hace necesario la introducción de pesos para los distintos tipos de observaciones y quizá para los puntos de apoyo. En el proceso analógico, se consideran las coordenadas de los centros de proyección de menor precisión que las de los puntos de paso y enlace, con un factor de peso de 4:1 a favor de estas últimas, pero pueden darse también otras situaciones diferentes que requieren pesos distintos.

En los trabajos que requieran escalas de vuelo grandes, es donde mas se puede cuestionar la precisión de los puntos de apoyo y donde la precisión de los métodos fotogramétricos pueden ser comparable a la del apoyo. Es en estos casos cuando es necesario establecer algún método para dar un peso relativo al apoyo con respecto a los puntos medidos fotogramétricamente. Es en estos casos cuando casos se introducen ecuaciones de observación adicionales para los puntos de control de la forma:

X		X _c		dX	
Y	=	Y _c	+	dY	
Z		Z _c		dZ	

siendo:

- X_C , Y_C , Z_C las coordenadas de los puntos de apoyo originales.
- *X*, *Y*, *Z* las coordenadas de los puntos de apoyo correctas.
- dX_C , dY_C , dZ_C las correcciones a efectuar a las coordenadas de los puntos de apoyo.

Si el peso de estas ecuaciones se hace muy grande (del orden de 10^8) entonces el control está , en efecto , ajustado rígidamente.

En este caso se generan tres nuevas ecuaciones y tres incógnitas adicionales por cada apoyo que tengamos distribuido sobre el bloque objeto del ajuste. El juego de ecuaciones de observación de los puntos de apoyo es de la forma:

$$\begin{bmatrix} x_{ij} & 0 & z_{ij} & -y_{ij} & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ y_{ij} & -z_{ij} & 0 & x_{ij} & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ z_{ij} & y_{ij} & -x_{ij} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\lambda \\ d\Omega \\ d\Phi \\ dK \\ dT_x \\ dT_z \\ dX_c \\ dY_c \\ dZ_c \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} -(Fx)_0 \\ -(Fy)_0 \\ -(Fz)_0 \end{bmatrix}$$

El nuevo juego de ecuaciones que se añade al ajuste es:

4.4.4. Ajuste separado pero simultáneo de la planimetría y la altimetría. Método 4-3

Se puede lograr un considerable ahorro en la cantidad de potencia requerida al ordenador separando las partes planimétricas y altimétricas, llegando a una solución casi directa del problema. Este ajuste puede resultar particularmente útil cuando la distribución del apoyo no es la idónea y el método iterativo no converge adecuadamente.

Si examinamos la ecuación:

$$\begin{bmatrix} x_{ij} & 0 & z_{ij} & -y_{ij} & 1 & 0 & 0 \\ y_{ij} & -z_{ij} & 0 & x_{ij} & 0 & 1 & 0 \\ z_{ij} & y_{ij} & -x_{ij} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\lambda \\ d\Omega \\ d\Phi \\ dK \\ dT_x \\ dT_z \end{bmatrix}_{j} = \begin{bmatrix} -(Fx)_0 \\ -(Fy)_0 \\ -(Fz)_0 \end{bmatrix}$$

podremos darnos cuenta que esta podría dividirse, escribiéndose en dos partes de la forma:

$$\begin{bmatrix} x_{ij} & -y_{ij} & 1 & 0 \\ y_{ij} & x_{ij} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\lambda \\ dK \\ dT_x \\ dT_y \end{bmatrix}_j = -\begin{bmatrix} x_{ij} - X_i \\ y_{ij} - Y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -z_{ij} \\ z_{ij} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Omega \\ d\Phi \end{bmatrix}_j$$
(1)

$$\begin{bmatrix} y_{ij} & -x_{ij} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Omega \\ d\Phi \\ dT_z \end{bmatrix}_{j} = -(z_{ij} - Z_{i}) - z_{ij} d\lambda_{j}$$
⁽²⁾

La primera ecuación es parecida a la utilizada en el método *Anblock*, pero con un término añadido a la derecha. Si se designa a los términos extremos de la parte de la derecha de ambas ecuaciones por C_1 y C_2 tendremos:

$$C_{1} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{ij} \\ z_{ij} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Omega \\ d\Phi \end{bmatrix}_{j} y C_{2} = -z_{ij} d\lambda$$

El juego de ecuaciones (1) puede resolverse directamente si sustituimos los elementos del vector columna de las incógnitas $[d\lambda, dK, dT_x, dT_y]^T$ por otro juego de incógnitas (d, e, f, g) cuyos elementos son idénticos a los de las ecuaciones *Anblock*. El nuevo juego de ecuaciones será de la forma:

$$\begin{bmatrix} x_{ij} & -y_{ij} & 1 & 0 \\ y_{ij} & x_{ij} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \\ g \end{bmatrix}_{i} = -\begin{bmatrix} x_{ij} - X_{i} \\ y_{ij} - Y_{i} \end{bmatrix} + C_{1}$$

Estas ecuaciones pueden resolverse directamente asumiendo que C_1 vale cero para obtener los primeros valores de (d, e, f, g) y por lo tanto (d λ , dK, dT_X, dT_Y). Puede ahora calcularse el valor de C_2 como función de d λ . Las ecuaciones (2) no son lineales y deben resolverse por tanto mediante proceso iterativo para (d Ω , d Φ , dT_Z) y de aquí el factor C_1 .

Esto nos dará un valor actualizado para C_2 y así sucesivamente. Normalmente sólo serán necesarias unas cuantas iteraciones de este tipo para obtener valores precisos para los siete parámetros de cada modelo.

Una importante variación de este tipo de solución se utiliza en la serie de programas conocidos como *PAT-M-43* desarrollados en la Universidad de Stuttgart (Prof. Akermann) Este programa ha demostrado ser, en la práctica uno de los más versátiles y efectivos.

En el ajuste altimétrico, se hace uso de los centros de proyección para reforzar las uniones de modelos a lo largo de las pasadas, especialmente en Ω , Φ . Para estos puntos las ecuaciones de observación toman la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & z_{ij} & 0 \\ -z_{ij} & 0 & 0 \\ y_{ij} & -x_{ij} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\Omega \\ d\Phi \\ dT_z \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}$$

Al igual que en el ajuste espacial del *PAT-M7*, las ecuaciones de observación hacen uso de matriz de rotación ortogonal de Rodrigues, con los parámetros independientes (a, b, c). Las ecuaciones de los puntos de apoyo se escriben igual que los de paso y enlace, pudiendo asignar desde uno hasta diez posibles valores de pesos, además es posible la incorporación de datos del APR y de estatóscopio, así como también información de superficies del mismo nivel, tal como superficies de agua tales como lagos y líneas costeras.

Las principales ecuaciones utilizadas son:

Matriz de rotación de Rodrigues:

$$R_{R} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 + \frac{(a^{2} - b^{2} - c^{2})}{4} & c + \frac{ab}{2} & -b + \frac{ac}{2} \\ -c + \frac{ab}{2} & 1 + \frac{(b^{2} - a^{2} - c^{2})}{4} & a + \frac{bc}{2} \\ b + \frac{ac}{2} & -a + \frac{bc}{2} & 1 + \frac{(c^{2} - a^{2} - b^{2})}{4} \end{bmatrix}$$
$$\frac{+b^{2} + c^{2}}{4}$$

con $\Delta = 1 + \frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{4}$

Ecuaciones para los puntos planimétricos tienen la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{i} \\ \mathbf{Y}_{i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{ij} & -\mathbf{y}_{ij} & 1 & 0 \\ \mathbf{y}_{ij} & \mathbf{x}_{ij} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{e} \\ \mathbf{T}_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{T}_{\mathbf{y}} \end{bmatrix}_{j} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{V}_{\mathbf{y}} \end{bmatrix}_{ij}$$

donde:

$$\mathbf{d} = \lambda \frac{\left(1 - \frac{1}{4}\mathbf{c}^2\right)}{\left(1 + \frac{1}{4}\mathbf{c}^2\right)} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{e} = \frac{\lambda \mathbf{c}}{\left(1 + \frac{1}{4}\mathbf{c}^2\right)}$$

Para los puntos de apoyo planimétricos las ecuaciones son de la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{i} \\ \mathbf{Y}_{i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{i} \\ \mathbf{Y}_{i} \end{bmatrix}^{\mathrm{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{\mathrm{X}} \\ \mathbf{V}_{\mathrm{Y}} \end{bmatrix}^{\mathrm{C}}$$

Para los puntos de apoyo altimétricos:

$$(\mathbf{z}_{ij} - \mathbf{Z}_{i}) + [\mathbf{y}_{ij} - \mathbf{x}_{ij} - \mathbf{1}] \begin{vmatrix} \Delta \mathbf{a} \\ \Delta \mathbf{b} \\ \Delta \mathbf{T}_{z} \end{vmatrix}_{i} = (\mathbf{V}_{z})_{i}$$

Para los puntos de apoyo altimétrico, incluido APR y superficie de nivel.

$$Z_i - Z_i^c = (V_z)_i^c$$

Para los centros de proyección:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{i} \\ \mathbf{Y}_{i} \\ \mathbf{Z}_{i} \end{bmatrix}^{PC} - \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{ij} \\ \mathbf{y}_{ij} \\ \mathbf{z}_{ij} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{z}_{ij} & \mathbf{0} \\ \mathbf{z}_{ij} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{y}_{ij} & \mathbf{x}_{ij} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{a} \\ \Delta \mathbf{b} \\ \Delta \mathbf{T}_{Z} \end{bmatrix}_{j} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{X} \\ \mathbf{V}_{Y} \\ \mathbf{V}_{Z} \end{bmatrix}$$

Para los datos de estatoscopio (punto i, pasada k):

$$Z_i^{PC} - Z_i^{stat} - \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ m \end{bmatrix} = V_{iK}^{stat}$$

Para datos APR (punto i, pasada k):

$$Z_i^G - Z_i^{APR} - \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1' \\ m \end{bmatrix} = V_{iK}^{APR}$$

siendo:

- H_1 = Altitud del centro de proyección (*PC*) al comienzo de la pasada
- $H_1' = (H_1 + Z_1 \Delta h_i Z_i) y Z_{ik}^{stat} = H_i$
- t = factor de tiempo tal que t × m = X_i × tan b

Para superficies y líneas de nivel de agua:

$$Z - z_{ijl} - \begin{bmatrix} y & -x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta T_x \end{bmatrix} = (V_z)_{ijl}$$

Secuencia de cálculo en programa PATM-43 es la siguiente:

- 1. Las ecuaciones planimétricas lineales se resuelven para (d , e , X_0 , Y_0) y de aquí puede calcularse (λ , c).
- 2. Los valores (λ , c, X₀, Y₀) se utilizan para llevar a cabo una transformación de las coordenadas de los puntos de enlace y de los centros perspectivos.
- 3. Las ecuaciones altimétricas no lineales de los puntos de enlace y de los centros de proyección, se

resuelven mediante iteración para obtener valores para las tres incógnitas restantes (a ,b ,Z₀).

- 4. Las coordenadas de los puntos de enlace y de los centros perspectivos se transforman una vez más utilizando los valores de (a ,b ,Z₀) en la matriz [R].
- 5. Después de unas cuantas repeticiones de este proceso se obtiene para todos los puntos un conjunto aceptable de coordenadas bloque.

Bibliografía

- Ackermann, F, Experience with applications of block adjusment for large scale surveys, Photogrammetric Record 7(41), Abril 1973.
- Ackermann, F., Ebner, H., Klein, H., A programme package for block adjustment with independent models, Cartography and Geodesy serie 11, nº 27, Frankfurt, 1972.
- Ackermann, F, A method of analytical block adjustment. for heights. Photogrammetria, vol. 18, n° 2, 1962
- Albertz, J, y Kreiling W., Manual fotogramétrico de bolsillo, Witcmann, H., Karlsruhe (1989), 4^a Edición. ISBN 3-87907-176-4.
- American Society of Photogrammetry. Manual of Photogrammetry, ASPRS, Cuarta Edición (1980). ISBN 0-937294-01-2.
- Burnside, C.D., Mapping from Aerial Photographs, Collins Professional, Londres, Segunda Edición (1979). ISBN 0-00-383036-5.
- Chueca P., M., Topografía, Dossat, Madrid (1982), Tomo II, 84-237-0591-9.
- Clavo, L., Fotogrametría II, Universidad Politécnica de Madrid, EUITT.
- Gómez, A., Fotogrametría Analítica, Universidad Politécnica de Madrid, ETSIA.
- Ghosh, S.K., Phototriangulation, Lexingtong Books, Londres (1975). ISBN 0-669-98210-5.
- Ghosh, S.K., Analytical Photogrammetry, Pergamon Press, Oxford (1988), 2^a Edición. ISBN 0-08-036103-X.
- Heras, A.E., Apuntes de Fotogrametría, Universidad Politécnica de Madrid, EUITT.
- Julia, J.E., Fotogrametría Analítica, E.T.S. de Ingenieros de Montes (U.P.M.) y Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología (Universidad Nacional de Tucuman). 1992.
- Krauss, K., Photogrammetry, Dümmler/Bonn (1993). ISBN 3-427-78684-6.
- Lerma, J.L., Aerotriangulación: Cálculo y compensación de un bloque fotogramétrico, Servicio de publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia, 1999. ISBN 84-7721-847-1.
- Moffitt, F.H. y Mikhail, E.M., Photogrammetry, Harper & Row Publishers., New York (1980), 3^a edición. ISBN 0-216-91996-7.
- Shut, G.H., On exact linear equations for the computation of the rotacional elements of absolute orientation, Photogrammetria 17, nº 1, 1960/61.
- Shut, G.H., Construction of orthogonal matrices and their application in analytical photogrammetry. Photogrammetria 15, n° 4, 1958/59.
- Thompson, E.H., The construction of orthogonal matrices. Photogrammetric Record 3(13), Abril 1952.
- Wolf, P.R, Independent Model Triangulation, Photogrammetric Engineering and Remote Sensing, vol. 56, nº 2, 1990, p. 1643.
- Wolf, P.R. y Dewitt, B.A, Elements of Photogrammetry with Applications in GIS, McGraw-Hill, EEUU, Tercera Edición (2000). ISBN 0-07-292454-3.
- Zhizhuo, W., Principles of Photogrammetry, Beijing, China (1990). ISBN 7-81030-00-8.
TEMA 5

AEROTRIANGULACIÓN POR HACES

5.1. Introducción

- 5.2. Relaciones matemáticas entre coordenadas imagen y terreno
- 5.3. Linealización de las ecuaciones
- 5.4. Ecuaciones de observación y ecuaciones normales
- 5.5. Aproximaciones iniciales para el ajuste por haces
- 5.6. Precisión, ventajas y desventajas del ajuste por haces
- 5.7. Compensación por haces con parámetros adicionales

Bibliografía

5.1. Introducción

En fotogrametría topográfica se piensa siempre en términos de modelos producidos por pares de fotografía. Sin embargo, indudablemente el procedimiento más flexible para la formación y ajuste de bloques y en general para la mayoría de las situaciones fotogramétricas, es a través del uso de los haces de rayos producidos por los fotogramas individuales.

En fotogrametría de objeto cercano (Non-Topographic Photogrammetry) la formación y ajuste de bloques, en general, se realiza a través del uso de los haces de rayos producidos por los fotogramas individuales, donde son posibles las configuraciones convergentes producidos por una posición múltiple de la cámara, siendo este método el que mejores posibilidades ofrece. En los trabajos de naturaleza topográfica, donde los ejes de la cámara son casi paralelos, esta técnica es, también la más flexible de todas y la que mejores resultados proporciona. Sin embargo, el número de ecuaciones que se produce es también mayor y así, para hacer pleno uso de ello, también se requieren mayores potencia de cálculo.

En un ajuste por haces de una pasada o bloque de fotografías, con al menos 60% de recubrimiento longitudinal y 20% de recubrimiento transversal, podemos calcular directamente las relaciones entre las coordenadas imagen y las coordenadas objeto, sin introducir coordenadas modelo como paso intermedio. Por tanto la *fotografia* es la unidad elemental del ajuste por haces.

La figura 1 muestra el principio. Las coordenadas imagen y el centro de proyección asociado de una fotografía definen un haz espacial de rayos. Los elementos de la orientación externa de todos los haces

FOTOGRAMETRÍA III

de un bloque se calculan simultáneamente para todas las fotografías. Los datos iniciales son las coordenadas imagen de los puntos de enlace (puntos que existen en más de una fotografía) además de las coordenadas imagen y coordenadas objeto de los puntos de control.



Figura 1. Principio del ajuste de bloques por haces.

El principio de este ajuste se basa en que los haces de rayos se desplazan *(tres translaciones - X₀, Y₀, Z₀-)* y giran *(tres giros - \omega, \phi, \kappa-), por tanto, los haces:*

intersectan unos con otros en los puntos de control menores y mayores
pasan a través de los puntos de control lo más cerca posible.

Los datos iniciales necesarios para realizar el ajuste son:

- Los parámetros de orientación interna del fotograma (c, x_o, y_o, x_F, y_F)
- Los parámetros de orientación externa del fotograma (X_0 , Y_0 , Z_0 , ω , ϕ , κ).
- Las coordenadas imagen de los puntos de control mayores y menores (x', y')
- Las coordenadas terreno de los puntos de apoyo (X, Y, Z), así como las coordenadas aproximadas de aquellos puntos que se impresionen en más de un fotograma y se deseen calcular sus coordenadas compensadas simultáneamente en el ajuste y compensación del bloque.

Este proceso se llama *"ajuste de haces"*, porque de todos los rayos que atraviesan cada posición de la lente constituyen un haz de rayos. Los haces de todas las fotos se ajustan simultáneamente, por tanto, los rayos intersectan en posiciones de los puntos de paso, enlace y puntos de apoyo.

A continuación se van a considerar la relación matemática entre las coordenadas imagen y las coordenadas objeto o terreno.

5.2. Relaciones matemáticas entre coordenadas imagen y terreno

Se va a considerar el caso más general, es decir, el de una toma fotográfica ideal (*Fig. 2*) en la cual el sistema de coordenadas de la fotografía $(\overline{x'}, \overline{y'}, \overline{z'})$ es paralela al sistema terreno (X, Y, Z). Se define la *Condición de Colineación* como la condición que obliga a que se encuentren en la misma recta el centro de proyección $O(X_0, Y_0, Z_0)$, el punto imagen $p(\overline{x'}, \overline{y'}, \overline{z'})$ y el punto del terreno proyectado P(X, Y, Z).



Figura 2. Definición de condición de colineación.

La condición de colineación podremos expresarla por medio de las ecuaciones:

$$\lambda = \frac{X - X_{o}}{\overline{x'}} = \frac{Y - Y_{o}}{\overline{y'}} = \frac{Z - Z_{o}}{\overline{z'}}$$

Expresando las ecuaciones anteriores en forma matricial, llegaremos a la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} X - X_{o} \\ Y - Y_{o} \\ Z - Z_{o} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \overline{x'} \\ \overline{y'} \\ \overline{z'} \end{bmatrix}$$
(1)

Si consideramos ahora una toma fotográfica real (*Fig. 3*), es decir, una fotografía inclinada donde el sistema de coordenadas fotográfico no es paralelo al sistema terreno, en este caso, tendríamos que el sistema de coordenadas fotográfico ideal $(\overline{x'}, \overline{y'}, \overline{z'})$ está con respecto al sistema fotográfico real^{*} (x', y', c) girado los valores (ω, φ, κ) con respecto a los tres ejes.



Figura 3. Definición de una toma fotográfica.

A través de una rotación R en el espacio podremos deducir:

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}'} \\ \overline{\mathbf{y}'} \\ \overline{\mathbf{z}'} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

Expresando R en función de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ c \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ c \end{bmatrix}$$

donde los coeficientes de la matriz de rotación R son:

 $\begin{aligned} a_{11} &= \cos \phi \cos \kappa & a_{21} &= \cos \omega \sin \kappa + \sin \omega \sin \phi \cos \kappa & a_{31} &= \sin \omega \sin \kappa - \cos \omega \sin \phi \cos \kappa \\ a_{12} &= -\cos \phi \sin \kappa & a_{22} &= \cos \omega \cos \kappa - \sin \omega \sin \phi \sin \kappa & a_{32} &= \sin \omega \cos \kappa + \cos \omega \sin \phi \sin \kappa \\ a_{13} &= \sin \phi & a_{23} &= -\sin \omega \cos \phi & a_{33} &= \cos \omega \cos \phi \end{aligned}$

Sustituyendo la expresión anterior en la de colinealidad (1), llegamos a:

$$\begin{bmatrix} X - X_{o} \\ Y - Y_{o} \\ Z - Z_{o} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \overline{x'} \\ \overline{y'} \\ \overline{z'} \end{bmatrix} = \lambda R \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ c \end{bmatrix}$$

^{*} De ahora en adelante llamaremos al sistema de coordenadas fotográfico real como sistema de coordenadas imagen.

Despejando de estas, las coordenadas imagen tendremos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X} - \mathbf{X}_{o} \\ \mathbf{Y} - \mathbf{Y}_{o} \\ \mathbf{Z} - \mathbf{Z}_{o} \end{bmatrix}$$

Dado que R es una matriz ortogonal, se cumple que la matriz inversa es igual a la matriz traspuesta, por tanto:

$$\left[\mathbf{R}^{-1}\right] = \left[\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\right]$$

llamando a $[R^{-1}] = [M]$, llegaremos a:

ſ	x′		$\left[X - X_{o} \right]$		m ₁₁	m ₁₂	m ₁₃	$\begin{bmatrix} X - X_{o} \end{bmatrix}$
	y'	$=\frac{1}{\lambda}M$	Y – Y _o	$\left =\frac{1}{\lambda}\right $	m ₂₁	m ₂₂	m ₂₃	Y – Y _o
	c		$\left[Z - Z_{\circ} \right]$		_m ₃₁	m ₃₂	m ₃₃	$\left\lfloor Z - Z_{o} \right\rfloor$

Despejando de esta expresión las tres ecuaciones:

$$x' = \frac{1}{\lambda} [m_{11} (X - X_{o}) + m_{12} (Y - Y_{o}) + m_{13} (Z - Z_{o})]$$

$$y' = \frac{1}{\lambda} [m_{21} (X - X_{o}) + m_{22} (Y - Y_{o}) + m_{23} (Z - Z_{o})]$$

$$c = \frac{1}{\lambda} [m_{31} (X - X_{o}) + m_{32} (Y - Y_{o}) + m_{33} (Z - Z_{o})]$$

Dividiendo las dos primeras ecuaciones por la tercera y llevando al lado derecho la distancia principal de la cámara, obtendremos las ecuaciones *(colineación)* de observación sobre las que se fundamenta el ajuste por haces.

$$x' = -c \frac{m_{11}(X - X_{o}) + m_{12}(Y - Y_{o}) + m_{13}(Z - Z_{o})}{m_{31}(X - X_{o}) + m_{32}(Y - Y_{o}) + m_{33}(Z - Z_{o})}$$

$$y' = -c \frac{m_{21}(X - X_{o}) + m_{22}(Y - Y_{o}) + m_{23}(Z - Z_{o})}{m_{31}(X - X_{o}) + m_{32}(Y - Y_{o}) + m_{33}(Z - Z_{o})}$$
(2)

Estas ecuaciones contienen 12 cantidades independientes:

- Coordenadas imagen (x', y', c)
- •Coordenadas del centro de proyección (X_0, Y_0, Z_0)
- Coordenadas del punto objeto (X,Y,Z)
- Elementos de rotación $(\omega, \varphi, \kappa)$ implícitos en los términos de la matriz [M]

5.3. Linealización de las ecuaciones

La dificultad que presentan estas ecuaciones cuando se utilizan para resolver las incógnitas correspondientes, es el hecho de no ser lineales. Un proceso de Linealización ha de llevarse a cabo antes de obtener una solución simultánea de las ecuaciones. Además de la falta de linealidad de estas ecuaciones, a la hora de obtener los parámetros $(\omega_1, \phi_1, \kappa_1)$ (X_{o1}, Y_{o1}, Z_{o1}) nos vamos a encontrar con la inexactitud de las observaciones realizadas (x', y').

Las ecuaciones (2) pueden expresarse como:

$$Fx = qx' + cr = 0$$

$$Fy = qy' + cs = 0$$

donde:

$$q = m_{31}(X - X_{o}) + m_{32}(Y - Y_{o}) + m_{33}(Z - Z_{o})$$

$$r = m_{11}(X - X_{o}) + m_{12}(Y - Y_{o}) + m_{13}(Z - Z_{o})$$

$$s = m_{21}(X - X_{o}) + m_{22}(Y - Y_{o}) + m_{23}(Z - Z_{o})$$

Aplicando el desarrollo en serie de Taylor a las anteriores ecuaciones, despreciando infinitésimos de segundo orden.

$$\begin{split} 0 &= \left(Fx\right)_{0} + \left(\frac{\partial Fx}{\partial X}\right)_{0} dX + \left(\frac{\partial Fx}{\partial Y}\right)_{0} dY + \left(\frac{\partial Fx}{\partial Z}\right)_{0} dZ + \left(\frac{\partial Fx}{\partial X_{o}}\right)_{0} dX_{0} + \left(\frac{\partial Fx}{\partial Y_{o}}\right)_{0} dY_{0} + \\ &+ \left(\frac{\partial Fx}{\partial Z_{o}}\right)_{0} dZ_{0} + \left(\frac{\partial Fx}{\partial \omega}\right)_{0} d\omega + \left(\frac{\partial Fx}{\partial \phi}\right)_{0} d\phi + \left(\frac{\partial Fx}{\partial \kappa}\right)_{0} d\kappa \\ 0 &= \left(Fy\right)_{0} + \left(\frac{\partial Fy}{\partial X}\right)_{0} dX + \left(\frac{\partial Fy}{\partial Y}\right)_{0} dY + \left(\frac{\partial Fy}{\partial Z}\right)_{0} dZ + \left(\frac{\partial Fy}{\partial X_{o}}\right)_{0} dX_{0} + \left(\frac{\partial Fy}{\partial Y_{o}}\right)_{0} dY_{0} + \\ &+ \left(\frac{\partial Fy}{\partial Z_{o}}\right)_{0} dZ_{0} + \left(\frac{\partial Fy}{\partial \omega}\right)_{0} d\omega + \left(\frac{\partial Fy}{\partial \phi}\right)_{0} d\phi + \left(\frac{\partial Fy}{\partial \kappa}\right)_{0} d\kappa \end{split}$$

donde $(Fx)_0$, $(Fy)_0$ son los valores de las ecuaciones originales particularizas para valores aproximados de X, Y, Z, X₀, Y₀, Z₀, ω , φ , κ y los términos $\left(\frac{\partial Fx}{\partial X}\right)$, $\left(\frac{\partial Fy}{\partial Y}\right)$,..... resultados de la aproximación. Las derivadas parciales de las funciones *Fx*, *Fy* se detallan en el *Apéndice B*.

Una vez linealizadas las expresiones anteriores, pueden escribirse de la forma:

$$V_{x} = A_{11}dX + A_{12}dY + A_{13}dZ - A_{11}dX_{o} - A_{12}dY_{o} - A_{13}dZ_{o} + A_{14}d\omega + A_{15}d\phi + A_{16}d\kappa + (Fx)_{0}$$
$$V_{y} = A_{21}dX + A_{22}dY + A_{23}dZ - A_{21}dX_{o} - A_{22}dY_{o} - A_{23}dZ_{o} + A_{24}d\omega + A_{25}d\phi + A_{26}d\kappa + (Fy)_{0}$$

donde se han sustituido las derivadas parciales por los coeficientes A_{ij} .

5.4. Ecuaciones de observación y ecuaciones normales

Cada punto imagen medido dará lugar a dos ecuaciones de observación siguiente:

$$V_{x} = A_{11}dX + A_{12}dY + A_{13}dZ - A_{11}dX_{0} - A_{12}dY_{0} - A_{13}dZ_{0} + A_{14}d\omega + A_{15}d\phi + A_{16}d\kappa + (Fx)_{0}$$

$$V_{y} = A_{21}dX + A_{22}dY + A_{23}dZ - A_{21}dX_{0} - A_{22}dY_{0} - A_{23}dZ_{0} + A_{24}d\omega + A_{25}d\phi + A_{26}d\kappa + (Fy)_{0}$$
(3)

Donde los coeficientes A_{ij} son las derivadas parciales anteriormente descritas, pero particularizadas para valores aproximados de los parámetros de orientación y para las coordenadas del terreno (puntos de apoyo).

Las incógnitas son los seis elementos de orientación externa de cada fotograma y las tres correcciones a efectuar a las coordenadas terreno de cada punto no considerado no fijo (p.e. enlace y paso). Si los haces pasan a través de un punto fijo (p.e. apoyo), las correcciones a las coordenadas terreno desaparecen.

Las ecuaciones de observación para un punto de control menor i situado sobre la fotografía j son de la forma:

$$\begin{bmatrix} A_{14} & A_{15} & A_{16} & -A_{11} & -A_{12} & -A_{13} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{24} & A_{25} & A_{26} & -A_{21} & -A_{22} & -A_{23} & A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\omega \\ d\varphi \\ d\kappa \\ dX_{0} \\ dY_{0} \\ dZ_{0} \\ dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix}_{j} - \begin{bmatrix} -(Fx_{ij})_{0} \\ -(Fy_{ij})_{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{x_{ij}} \\ V_{y_{ij}} \end{bmatrix}$$
(4)

Las ecuaciones de observación para un punto de apoyo i situado sobre la fotografía j son de la forma:

$$\begin{bmatrix} A_{14} & A_{15} & A_{16} & -A_{11} & -A_{12} & -A_{13} \\ A_{24} & A_{25} & A_{26} & -A_{21} & -A_{22} & -A_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\omega \\ d\phi \\ d\kappa \\ dX_{O} \\ dY_{O} \\ dZ_{O} \end{bmatrix}_{j} - \begin{bmatrix} -(Fx_{ij})_{0} \\ -(Fy_{ij})_{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{x_{ij}} \\ V_{Y_{ij}} \end{bmatrix}$$

Como ya se comentó en modelos independientes, si se tiene en cuenta las estrategias de cálculo de los programas PAT-B, las ecuaciones de los puntos de apoyo tomarían la misma forma que la de los puntos de enlace (4) y además se añadirían tres nuevas ecuaciones al ajuste con una ponderación

adecuada para estos puntos de la forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix}_{j} - \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{c} \\ \mathbf{Y}_{c} \\ \mathbf{Z}_{c} \end{bmatrix}_{j} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{x} \\ \mathbf{V}_{x} \\ \mathbf{V}_{x} \end{bmatrix}$$

- X_C , Y_C , Z_C las coordenadas de los puntos de apoyo originales.
- *X*, *Y*, *Z* las coordenadas de los puntos de apoyo correctas.

Como desarrollo práctico de lo visto hasta ahora, se propone realizar el ajuste del bloque de figura 3 constituido por dos pasadas, cada una de ellas con cinco fotografías; sobre el que se han distribuido un total de cuatro puntos de apoyo planimétrico-altimétrico y tres altimétrico.



Figura 4. Bloque fotogramétrico objeto del ajuste.

Por razones de sencillez se han hecho coincidir los modelos en los recubrimientos de las dos pasadas, con lo cual se ha reducido el número de puntos de enlace entre pasadas. Hay que decir que dependiendo de la numeración que se introduzca en cada las fotografías (transversal o longitudinal) en el juego de ecuaciones de observación, estas condicionarán la forma de las ecuaciones normales reducidas y por tanto la rapidez en la resolución. En el *Apéndice B* se trata con más detalle estas posibilidades.

En nuestro caso tendremos para el ajuste por haces del bloque de la figura:

Número total de ecuaciones = $[(2\times6\times2) + (3\times9\times2)] \times 2 = 156$ Número total de incógnitas = $(5\times2\times6) + (18\times3) + (3\times2) = 120$

En la siguiente tabla se muestra el juego de ecuaciones de observación indirecta del ejemplo propuesto de ajuste de haces.



Tabla 1. Ecuaciones de observación del ajuste de haces.

Las ecuaciones de observación (3) pueden expresarse de la forma:

$$AX + AX - L = V \tag{5}$$

donde:

- $\dot{\mathbf{X}} = [d\omega_j, d\phi_j, d\kappa_j, dX_{0_j}, dY_{0_j}, dZ_{0_j}]^T$ vector incógnita constituido por las correcciones a los elementos de la orientación externa de la fotografía j.
- $\ddot{X} = [dX_i, dY_i, dZ_i]^T$ vector incógnita constituido por las correcciones a las coordenadas espaciales del punto i.
- A, A submatrices de diseño correspondientes a las incógnitas de orientación externa y coordenadas espaciales respectivamente.
- $L = [(Fx_{ij})_0, (Fx_{ij})_0]$ vector de constantes de observación.

La solución del sistema de ecuaciones es utilizando la técnica de partición de las incógnitas a calcular, es decir, se calculan las correcciones a efectuar a cada las coordenadas de cada uno de los puntos que intervengan en el ajuste (para el caso del ejemplo propuesto, puntos de paso, enlace y puntos de apoyos altimétricos). Las primera solución del sistema de ecuaciones normales nos proporciona un juego de correcciones a los valores estimados (aproximaciones) de las incógnitas. las ecuaciones normales. Con estos valores podemos calcular unos nuevos valores de las incógnitas que nos servirán a su vez para calcular los nuevos valores de los elementos de la matriz de diseño (A) y de los términos independientes (L). Comenzará a partir de ahora una nueva iteración procediéndose de este modo hasta que las correcciones resulten insignificantes. En la siguiente figura se muestra el flujo de la secuencia de cálculo vista anteriormente.



Figura 5. Secuencia de cálculo en el ajuste del bloque por haces.

El sistema de ecuaciones normales viene dado por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{12}^{\mathrm{T}} & \mathbf{N}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{x}_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{1} \\ \mathbf{n}_{2} \end{bmatrix}$$

siendo:

$$\begin{split} \mathbf{N}_{11} &= \mathbf{\dot{A}}^{\mathrm{T}} \mathbf{W} \mathbf{\dot{A}} \qquad \mathbf{N}_{12} &= \mathbf{\dot{A}}^{\mathrm{T}} \mathbf{W} \mathbf{\ddot{A}} \qquad \mathbf{N}_{21} &= \mathbf{\ddot{A}}^{\mathrm{T}} \mathbf{W} \mathbf{\dot{A}} \\ \mathbf{N}_{22} &= \mathbf{\ddot{A}}^{\mathrm{T}} \mathbf{W} \mathbf{\ddot{A}} \qquad \mathbf{n}_{1} &= \mathbf{\dot{A}}^{\mathrm{T}} \mathbf{W} \mathbf{L} \qquad \mathbf{n}_{2} &= \mathbf{\ddot{A}}^{\mathrm{T}} \mathbf{W} \mathbf{L} \end{split}$$

Una vez planteado el sistema de ecuaciones normales, el siguiente paso será resolver las incógnitas del ajuste por haces. Para ello se obtendrá separadamente las correcciones a efectuar a los elementos de la orientación externa (x_1) y las correcciones de las coordenadas espaciales de los puntos de enlace, paso y centros (x_2) .

$$N_{11}X_{1} + N_{12}X_{2} = n_{1}$$
$$N_{12}^{T}X_{1} + N_{22}X_{2} = n_{2}$$

5.5. Aproximaciones iniciales para el ajuste por haces.

Como las ecuaciones utilizadas en el ajuste no son lineales, estas han tenido que linelizarse utilizando el desarrollo en serie de Taylor, teniendo en cuenta que necesitaremos las aproximaciones iniciales para las incógnitas. Para hacer converger las soluciones propiamente, las aproximaciones inciales deben ser próximas a los valores correctos, es decir, necesitaremos conocer aproximadamente las coordenadas terreno de los puntos que intervienen en el ajuste y saber con sufuciente aproximación los parámetros de orientación externa de cada fotograma (el algoritmo de cálculo converge más rapidamente cuanto mejores sea las aproximaciones a los parámetros de orientación). Podemos usar varios métodos para obtener estas aproximaciones iniciales, aunque se suelen emplear los ajustes preliminares de la pasada.

Generalmente, en la práctica de las aerotriangulaciones se supone que el vuelo cumple con el pliego de condiciones técnicas, por tanto, los giros omega y phi de la cámara se puden considerar muy pequeños o guales a cero; como el giro kappa depende de la trayectoria del avión, este puede obtenerse a partir del proyecto de vuelo. En el caso de no disponer inicialmente de la información referente al posicionamiento y orientación del fotograma, se recurre a algoritmos matemáticos que permiten determinar los parámetros de orientación externa aproximados, como por ejemplo el método de resección espacial.

También puede efectuarse como primer paso la orientación relativa analítica para cada par estereoscópico del bloque. Los residuos de las fotocoordenadas se deben inspeccionar en este punto como un chequeo inicial de las mediciones. Seguidamente, los modelos orientados relativamente se conectan para formar las pasadas, por medio de transformaciones tridimensionales de coordenadas. Los residuos obtenidos en este paso pueden servir para un nuevo chequeo de las mediciones de las fotocoordenadas e identificación de puntos. Una vez que todos los modelos de la pasada han sido formados y dados por válidos, cada pasada se ajusta individualmente a los puntos de control terreno localizados dentro de cada pasada. Este ajuste al control terrestre puede ser realizado mediante una transformación tridimensional conforme o una transformación tridimensional polinómica. Los residuos obtenidos en este paso nos proporcionan comprobación entre las coordenadas terreno y los puntos de identificación.

FOTOGRAMETRÍA III

Las coordenadas terreno se calcularán para todos los puntos del bloque fotográfico. Una comprobación adicional podrá ser realizada al validar la identificación de los puntos entre pasadas. Si la identificación de los puntos de unión es consistente, sus coordenadas estarán dentro de una pequeña tolerancia. Asumiendo que todo es consistente, los resultados de las coordenadas terreno pueden ser usadas como aproximaciones iniciales para el ajuste de haces.

Las aproximaciones para los parámetros de la orientación externa se obtienen directamente del ajuste de la pasada si dicho ajuste es realizado mediante una transformación tridimensional conforme. En ese caso, los centros de proyección se incluyen cuando los modelos adyacentes se conectan, sus coordenadas del espacio objeto serán correctas después del ajuste final al control terrestre. Considerando la fotografía vertical, podemos aproximar ω y ϕ iguales a 0. Las aproximaciones de κ se obtienen directamente de la transformación tridimensional conforme del control terrestre. Si realizamos un ajuste polinómico de pasadas, los centros de proyección no serán incluidos en el ajuste. En ese caso, después de haber realizado el ajuste polinómico, podremos resolver el problema de resección en el espacio para cada foto. En estos cálculos, las coordenadas terreno obtenidas para los puntos de paso en el ajuste polinómico puden ser usadas como coordenadas de control.

Hay que tener en cuenta que en la actualidad gran número de vuelos fotogramétrico se están realizando mediante observaciones GPS cinemático, tanto en aplicaciones de navegación como en la determinación de las coordenadas de los centros de proyección. Por lo tanto estas pueden ser introducidas dentro del ajuste por haces.

5.6. Precisión, ventajas y desventajas del ajuste por haces

Aunque el modelo matemático de un ajuste del bloque por haces difiere significativamente del ajuste del bloque por modelos independientes (los centros de proyección con las coordenadas imagen como observaciones por una parte y por otra transformación de semejanza con las coordenadas modelo como observaciones) las normas de precisión para el ajuste por modelos independientes pueden aplicarse más o menos al ajuste del bloque por haces.

La precisión del modelo simple necesaria para el cumplimiento de estas reglas puede ser estimado para un ajuste del bloque por haces con parámetros adicionales de un bloque regular con un recubrimiento longitudinal de 60% y un recubrimiento transversal de 20% y para puntos señalizados, como:

- •Planimetría: $\sigma_{X,Y} = \pm 3\mu m$ en la fotografía.
- Altimetría: $\sigma_Z = \pm 0.03^{0}/_{00} \pm 0.04^{0}/_{00}$ de la distancia principal.

Ackermann dio una información comprensiva sobre la precisión del ajuste por haces (en el próximo tema se verá parte de este estudio). Este método de ajuste también ha permitido desarrollar otras aplicaciones de aerotriangulación. Por ejemplo, Brown explicó el uso de la técnica para establecer una densa red de puntos en ciudades por medio de la fotogrametría.

Entre las ventajas y desventajas del ajuste del bloque por haces con respecto al ajuste por modelos independientes:

- *Desventajas:*
 - Problema no lineal, por lo que las aproximaciones solo pueden establecerse después de largos procedimientos.
 - Métodos de cálculo intensivo.

- Los instrumentos analógicos no se pueden usar para las mediciones.
- Siempre es un problema espacial, por tanto no son posibles los ajustes en planimetría y altimetría por separado.
- Ventajas:
 - Método más preciso de aerotriangulación (relación directa entre las coordenadas terreno e imagen sin pasos intermedios de formación de modelos).
 - Posibilidad de ampliar la técnica para compensar errores sistemáticos.
 - Posibilidad de incorporar información externa en el ajuste (elementos conocidos de orientación externa, observaciones medidas en campo...).
 - Posibilidad de usar cámaras convencionales.
 - Posibilidad de transformar los elementos de orientación externa para ser introducidos en instrumentos analógicos y digitales. Las medidas de puntos de control son entonces innecesarias.

5.7. Compensación por haces con parámetros adicionales

El ajuste de haces con parámetros adicionales por lo general se utiliza para modelar los defectos de orientación interna de la cámara, así como posibles errores sistemáticos introducidos durante el ajuste del bloque. En la figura 6 puede apreciarse los errores sistemáticos producidos sobre una imagen (corresponden a las discrepancias entre el modelo matemático de la proyección central y la geometría efectiva de la imagen).



Figura 6. Deformaciones producidas en la imagen por errores sistemáticos.

Si se está trabajando con cámara métrica la introducción de dichos parámetros se utiliza para compensar los errores residuales debidos a la distorsión, deformación del fotograma y refracción. Por el contrario, si se trabaja con cámara no métrica su consideración es fundamental para conseguir resultados con precisión. Es típico en estas cámaras que el centro de proyección teórico se deforma significativamente por la distorsión de las lentes y de la película. Estas influencias pueden ser tenidas en cuenta en el ajuste por haces mediante la introducción de este tipo de ajuste.

FOTOGRAMETRÍA III

Es evidente que las correcciones de la deformación de la imagen hechas a priori solo compensan una parte del total de los errores presentes y por tanto quedará una parte de esos por corregir, cuya existencia se ha visto confirmada por todas las investigaciones. Aunque su magnitud es muy pequeña (<10 μ m habitualmente) su propagación mediante el ajuste puede producir deformaciones en el bloque bastantes importantes.

Por medio de este procedimiento se recurre a la calibración de la cámara durante el cálculo y es por esta razón, el método más riguroso y preciso de compensación de bloques aerotriangulados.

Normalmente la corrección de estos errores se hace ampliando, con nuevos bloques de incógnitas, del modelo matemático utilizado en el ajuste con unos *"parámetros adicionales"* que corrigen los elementos de la orientación interna principalmente. Consiste en aplicar un polinomio en función de las coordenadas imagen (sus coeficiente se denominan parámetros adicionales)

El modelo típico son las ecuaciones de colinealidad, siendo las ecuaciones de observación de la forma:

$$AX + AX + AX - L = V$$

siendo:

- X vector incógnita constituido por las correcciones a los elementos de la orientación externa de la fotografía j.
- X vector incógnita constituido por las correcciones a las coordenadas espaciales del punto i.
- X vector incógnita constituido por los parámetros adicionales.

Con relación a este modelo se plantean una serie de incógnitas referidas a:

- ≻¿Qué parámetros se van a elegir?
- ➢¿Cuál es su significado estadístico o su fiabilidad ?
- » ¿Cuántos juegos de parámetros distintos se pueden aplicar en un mismo bloque?

Para responder a estas cuestiones se han desarrollado dos filosofías:

- La primera trate de identificar las causas físicas que provocan las deformaciones y construir un modelo matemático que las suprima (juego de 21 parámetros de Brown).
- La segunda enfoca, el tema de una manera más empírica estudiando la geometría de la deformación y añadiendo expresiones polinómicas de distinto grado de complejidad. Las más sencillas son las que corrigen los errores sistemáticos en los 9 o en los 25 puntos estándar de la fotografía. Como ejemplo pueden citarse los juegos de 12 y 44 parámetros que recomienda Ebner y Grün.

$$\Delta x = xb_{1} + yb_{2} - b_{3}\left(2x^{2} - \frac{4b^{2}}{3}\right) + xyb_{4} + b_{5}\left(y^{2} - \frac{2b^{2}}{3}\right) + xb_{7}\left(y^{2} - \frac{2b^{2}}{3}\right) + yb_{9}\left(x^{2} - \frac{2b^{2}}{3}\right) + b_{11}\left(x^{2} - \frac{2b^{2}}{3}\right)\left(y^{2} - \frac{2b^{2}}{3}\right)$$
$$\Delta x = -yb_{1} + xb_{2} + xyb_{3} + b_{6}\left(x^{2} - \frac{2b^{2}}{3}\right) + b_{8}\left(x^{2} - \frac{2b^{2}}{3}\right) + xb_{10}\left(y^{2} - \frac{2b^{2}}{3}\right) + b_{12}\left(x^{2} - \frac{2b^{2}}{3}\right)\left(y^{2} - \frac{2b^{2}}{3}\right)$$

Las ecuaciones de colinealidad pueden expresarse de la forma:

$$x = -c\frac{r}{q}$$
 $y = -c\frac{s}{q}$

Aplicando las correcciones a dichas ecuaciones, estas toman la forma:

$$x + \Delta x = -c\frac{r}{q}$$
 $y + \Delta y = -c\frac{s}{q}$

Cualquiera que sea la elección nos llevará a elegir uno términos relativamente sencillos ya sean del tipo polinómico o trigonométrico, siendo ambos tipos de parámetros igual de efectivos. Cuando se utilizan demasiados parámetros, pueden darse casos de singularidad en las ecuaciones normales, dependiendo de la geometría de las observaciones, del recubrimiento y del apoyo disponible.

En todo caso, la experiencia nos dirá el número de parámetros a utilizar, se puede comenzar con unos pocos (que sepamos por otras pruebas que están siempre presentes) e ir añadiendo y comprobando su efectividad, y se puede seguir el camino opuesto, es decir, comenzar con un número mas grande e ir eliminando aquellos que menos efecto produzcan.

El otro problema se refiere a cuántos juegos de parámetros adicionales independientes han de ser aplicados en un mismo bloque. No se puede suponer, realmente, que los errores sistemáticos de la imagen sean constantes para toda la población de las fotografías de un bloque. A veces existen razones externas para subdividir las fotografías de un bloque en dos o más grupos para los que se aplicarían juegos distintos; tal es el caso de un bloque compuesto por fotografías pertenecientes a distintas misiones de vuelo, con diferentes cámaras, diferentes películas o simplemente distintas direcciones de vuelo, con lo cuál no es descabellado esperar diferentes errores sistemáticos en cada subgrupo y tenerlos en cuenta, por tanto, en juegos de parámetros diferentes. En general, se puede decir que es una buena táctica utilizar juegos diferentes para cada pasada, incrementándose considerablemente de este modo el número de incógnitas.

Este modelo se emplea tanto en aerotriangulación como en fotogrametría de "objeto cercano" puesto que permite el ajuste cualquiera que sea la disposición de los fotogramas en el espacio, como ya se comentó al principio del apartado.



Figura 7. Toma convergente efectuada del objeto en múltiples posiciones.

La autocalibración que tiene lugar durante el proceso de cálculo con la ayuda de los parámetros adicionales nos permitirá procesar imágenes que difieran de la proyección centra. Este método también muy útil para determinar la geometría de cámaras semimétricas y tomada en consideración en el

FOTOGRAMETRÍA III

proceso de restitución.

Cuantas más imágenes contribuyan a determinar el punto objeto, tanto mas exactas serán las coordenadas que para ese punto calculemos. En la figura 8 puede observarse la dependencia entre la exactitud de los puntos (a escala imagen) y el número de imágenes "n" en que aparecen.



Figura 8. Precisiones planimétricas y altimétricas en función del número de fotogramas.

Este tipo de soluciones emplea aproximadamente el doble de tiempo dé cálculo que la solución estándar de ajuste de haces. El grado de ganancia en precisión, aunque depende de varios factores, no representa mas de un 25% para un bloque bien controlado, sin embargo en situaciones no óptimas la mejora puede ser bastante mayor (de 3 o más veces).

En altimetría sabemos que la propagación de errores es menos favorable, y el uso de esta técnica no produce ninguna mejora en el caso de los recubrimientos transversales típicos de 20 a 25%, sin embargo el aumento de éste hasta el 60% repercute en un aumento de la precisión significativo.

Bibliografía

- Ackermann, F, The use of camera orientation data in Photogrammetry- A review. Photogrammetria, vol. 42, 1987.
- Albertz, J, y Kreiling W., Manual fotogramétrico de bolsillo, Witcmann, H., Karlsruhe (1989), 4^a Edición. ISBN 3-87907-176-4.
- American Society of Photogrammetry. Manual of Photogrammetry, ASPRS, Cuarta Edición (1980). ISBN 0-937294-01-2.
- Brandstätter, G., Otero, J., Romero, P. y Sevilla, M.J., VI Curso de Geodesia Superior: Fotogrametría y Posicionamiento GPS, Realigraf S.A., Madrid, (1990). ISBN 84-87488-02-1.
- Burnside, C.D., Mapping from Aerial Photographs, Collins Professional, Londres, Segunda Edición (1979). ISBN 0-00-383036-5.
- Chueca P., M., Topografía, Dossat, Madrid (1982), Tomo II. ISBN 84-237-0591-9.
- Ebner, H., Self-Calibrating Block Adjustment, Bildmessung und Luftbildwesen, Heft 4, 1976.
- Fryer J.G. y Brown D.C., Lens distorsion for close-range Photogrammetry. PE&RS, vol. 52(1):51-58, 1986.
- Ghosh, S.K., Phototriangulation, Lexingtong Books, Londres (1975). ISBN 0-669-98210-5.
- Ghosh, S.K., Analytical Photogrammetry, Pergamon Press, Oxford (1988), 2^a Edición. ISBN 0-08-036103-X.
- Heras, A.E., Apuntes de Fotogrametría, Universidad Politécnica de Madrid, EUITT.
- Krauss, K., Photogrammetry, Dümmler/Bonn (1993). ISBN 3-427-78684-6.

- Lerma, J.L., Aerotriangulación: Cálculo y compensación de un bloque fotogramétrico, Servicio de publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia, 1999. ISBN 84-7721-847-1.
- Moffitt, F.H. y Mikhail, E.M., Photogrammetry, Harper & Row Publishers., New York (1980), 3^a edición. ISBN 0-216-91996-7.
- Shut, G.H., Selection of additional parameters for the bundles. PE&RS, 1979
- Shut, G.H., Block Adjustment of Bundles, The Canadan Surveyor, vol. 32(2)1980.
- Wolf, P.R, Independent Model Triangulation, PE&RS, vol. 56, nº 2, 1990, p. 1643.
- Wolf, P.R.; Dewitt, B. A, Elements of Photogrammetry with Applications in GIS, McGraw-Hill, EEUU, Tercera Edición (2000). ISBN 0-07-292454-3.
- Zhizhuo, W., Principles of Photogrammetry, Beijing, China (1990). ISBN 7-81030-00-8.

TEMA 6

PRECISIÓN Y DISTRIBUCCIÓN DEL APOYO EN AEROTRIANGULACIÓN

6.1. Introducción

6.2. Precisión de la aerotriangulación
6.2.1. Precisión planimétrica y altimétrica en el ajuste de bloques por modelos independientes
6.2.1.1. Planimetría
6.2.2.2. Altimetría
6.2.2.1. Planimetría
6.2.2.1. Planimetría
6.2.2.2. Altimetría
6.2.2.3. Conclusiones
6.2.3. Detección automática de errores groseros
6.3.1. Planimetría
6.3.2. Altimetría
6.3.2. Altimetría
6.3.3. Configuración más idónea de los puntos de apoyo en el ajuste de bloques

6.1. Introducción

En este tema se van a abordar las cuestiones relativas a las precisiones teórica y empírica de la triangulación aérea y en el siguiente de la integración de las técnicas de GPS en los métodos de aerotriangulación. Debido al aumento en estos últimos años de la utilización de las técnicas de aerotriangulación se hace necesario tratar la relación entre la precisión en la compensación y aquellos parámetros como forma y tamaño del bloque, distribución de puntos de apoyo, cantidad de puntos de enlace, recubrimientos (especialmente) los transversales, tipo de fotografía,...etc. Muchas de las dificultades que nos encontramos en la práctica tienen su origen en un diseño deficiente de la distribución de los puntos de apoyo o en la elección de la cantidad de puntos de enlace por ejemplo.

6.2. Precisión de la aerotriangulación

Con la aparición de la triangulación analítica vino el deseo en parte de los fotogrametristas de estudiar la propagación de errores justo con el ajuste mejorando la determinación de un criterio para la determinación de la precisión del sistema. Los primeros estudios fueron realizados por Schmid (1961)

FOTOGRAMETRÍA III

restringiéndose este a pasadas de fotografías debido a las limitaciones de ordenadores y programas. En ese estudio Schmid encontró que para pasadas hay un número óptimo de modelos entre puntos de control (6 a 7), dada una amplitud de campo particular y una longitud de banda. A mayor altitud menos fotografías son necesarias para cubrir la misma superficie, pero la escala es más pequeña y la precisión decrece. Del mismo modo cuanto menor es la altitud, la precisión se incrementa pero la propagación de error asociada con un gran número de conexiones degrada los resultados.

La precisión de las coordenadas ajustadas depende principalmente de:

- Precisión de las observaciones, tanto planimétricas como altimétricas.
- Geometría del bloque; este factor no solo tiene influencia en la precisión sino también en la fiabilidad de los resultados del ajuste, sobre todo en la detección de errores groseros.

La precisión de las observaciones después del ajuste dependen del vuelo fotogramétrico (escala de fotografía, focal), de las mediciones (instrumento, operador) y del tipo de puntos de enlace que se utilicen (preseñalizados o marcados), mientras que la influencia de la geometría del bloque depende del número y distribución de los puntos de apoyo (control planimétrico y altimétrico), de enlace (el número de puntos de enlace no tiene mucha influencia en la precisión pero si en la fiabilidad de los resultados del ajuste), forma y tamaño del bloque.

Generalizando podremos decir que la precisión depende de los factores:

- Tipo de cámara aérea
- Escala fotográfica
- Solapes
- Número y distribución de puntos de apoyo.
- Forma y tamaño del bloque.
- Método del ajuste
- Incorporación de datos externos.

Hay que hacer constar que habrá que distinguir entre precisiones teóricas y precisiones empíricas o experimentales. En este tema se van a abordar principalmente la teórica. Existe publicación más que abundante de trabajos efectuados en campos de prueba experimentales, en los que se estudiaron y analizaron la precisión del ajuste de bloque, llegando a conclusiones muy similares a los téoricos.

La precisión teórica se basa en la determinación del error estándar de los puntos comunes en los distintos modelos.

Esta precisión es fruto de trabajos de investigación desarrollados a lo largo de diversas etapas. A continuación se mostrarán los resultados de estos trabajos publicados en fechas diversas, que analizan la precisión teórica.

6.2.1. Precisión planimétrica y altimétrica en el ajuste de bloques por modelos independientes

La reducción del número de puntos de apoyo medidos en campo conlleva en general una reducción de precisión comparada con la orientación absoluta de cada modelo individual (como mínimo se miden en campo un total de cuatro puntos). Es por tanto de primera importancia estimar esta reducción dentro de la precisión.

En el ajuste del bloque espacial, la precisión planimétrica no está afectada por la precisión de las elevaciones (altimetría) del modelo o por la disposición de los puntos de apoyo altimétricos. Similarmente, la precisión altimétrica es independiente de la precisión de las coordenadas modelo planimétricas (x, y) y de la distribución de los puntos planimétricos de apoyo. Los resultados para planimetría son válidos tanto para el ajuste planimétrico como para el ajuste espacial del bloque.

6.2.1.1. Planimetría

El profesor Ackermann ha estudiado este tema en detalle y sus investigaciones han dado lugar a numerosas publicaciones. En una de ellas se presentan las conclusiones principales mediante perspectivas muy expresivas que permiten apreciar la influencia de la distribución de los puntos de apoyo en la precisión final de la compensación (*Fig. 1,2 y 3*).

En estos estudios se analizó:

- Distribución y numero de puntos de apoyo.
- Influencia del tamaño y forma de los bloques.
- Influencia de los solapes.
- Tipo de objetivo (se hicieron comparaciones con tomas granangulares y supergranangulares).

Para el estudio teórico se calculan las coordenadas X, Y de los puntos de enlace por mínimos cuadrados usando las observaciones indirectas, podemos obtener su precisión, más correctamente, los coeficientes de peso Q_{XX} y Q_{YY} , mediante la inversión de la matriz de ecuaciones normales *(Tema 4, apartado 4.4.1)*. Como resultado de la estructura simétrica en X e Y, los coeficientes de los pesos son idénticos y son llamados Q_{LL} . Por tanto tenemos la precisión $\sigma_{B,PL}$ de las coordenadas X e Y de los puntos de enlace después del ajuste del bloque:

$$\sigma_{\rm B,PL} = \sqrt{Q_{\rm LL}} \ \sigma_{\rm o} = \sqrt{Q_{\rm LL}} \ \sigma_{\rm M,PI}$$

donde σ_o es el error de la unidad de peso del ajuste, la precisión σ_x o σ_y de una coordenada modelo x o y, expresado en el sistema de coordenadas terreno. La cantidad $(Q_{LL})^{1/2}$ puede ser considerada como un factor que multiplicado por la precisión $\sigma_{M,PL}$ ($\sigma_{M,PL} = \sigma_o m_b$ - precisión en un modelo simple -) de las coordenadas XY en los modelos individuales, da la precisión planimétrica $\sigma_{B,PL}$ del bloque.



Figura 1. Precisión planimétrica con 4 puntos en las esquinas del bloque, para bloque cuadrados $n_s \times n_m$ ($n_s = n$ úmero de pasadas, $n_m = n$ úmero de modelos en cada pasada).(*Krauss, K.*)

La figura 1 muestra esos factores $(Q_{LL})^{1/2}$ para varios tamaños de bloque, cada uno de los cuales contiene un punto de control en las cuatro esquinas del bloque. La cantidad σ_{max} indica el máximo error planimétrico del bloque, mientras que σ_{medida} indica el valor de la precisión de todos los puntos de enlace del bloque.

Puede observarse de la figura 1 que:

- La exactitud cae significativamente a medida que el tamaño del bloque aumenta y
- El error medio cuadrático más grande de se da en el medio de los bordes del bloque.

Es por consiguiente obvio que si se desea aumentar la precisión global se tendrá que proporcionar un modelo denso de puntos de control a lo largo de los bordes del bloque. El éxito de semejante estrategia se muestra en la figura 2.



Figura 2. Precisión planimétrica con un denso modelo de puntos de apoyo a lo largo de los bordes del bloque, para bloques cuadrados n_s×n_m. (*Krauss, K.*)

Por tanto la precisión:

- ✓ es casi independiente del tamaño del bloque y
- ✓ está cerrada a la precisión en un solo modelo.



Figura 3. Precisión planimétrica con un denso modelo de puntos de apoyo a lo largo de los bordes del bloque y un punto de apoyo en el centro del bloque, para bloques cuadrados n_s×n_m.

Si se comparan los resultados de esta figura con lo de la anterior (figura 2), puede observarse que los puntos de apoyo dentro del bloque no traen cambios significativos en precisión.

Ejemplo. Se dispone de un bloque constituido por 32 modelos (figura 1, caso d1). La escala de los fotogramas es 1:10000. Los modelos se han orientado en un instrumento analítico de primer orden, el error medio cuadrático planimétrico del peso unidad es de 6 µm. Se pide: determinar la precisión planimétrica previsible del bloque ajustado por modelos independientes.

$$\begin{split} \mu_{XY(med.)} &= 1.85 \times \sigma_o \\ \mu_{XY(max.)} &= 2.28 \times \sigma_o = 2.28 \times 6 = 13.68 \ \mu m \end{split}$$

Error estándar planimétrico del bloque:

 $\sigma_{B,PL} = \mu_{XY} \times m_b$

Precisión del bloque (el error medio): $\sigma_{B,PL} = \mu_{XY} \times m_b = 11.10 \times 10000 = 0.110 \text{ m}.$

Precisión del bloque (el error máximo): $\sigma_{B,PL} = \mu_{XY} \times m_b = 13.68 \times 10000 = 0.137 \text{ m}.$

Otros estudios teóricos generalizaron los resultados anteriores a bloques cuadrados (*Fig. 4*). Entre ellos citar los publicados por Ackermann, Ebner y Meissl para los modelos de puntos de control mostrados en la figura 4; en ella se muestran cuatro versiones de control (P1, P2, P3 y P4). Para el caso de P1 (se corresponde con la figura 2) el número i de modelos del puente correspondiente a 2 base a lo largo de los bordes del bloque. Cada uno de estos cuatro casos corresponden a tomas fotográficas con recubrimiento longitudinal del 60% y transversal del 20%. En el *Apéndice B* se detallan los resultados para recubrimiento transversal del 60%.



Figura 4. Modelo de puntos de control planimétrico para las ecuaciones 1. Observar que el tamaño del bloque es variable, así para P1 el número de puntos de control se incrementa con el tamaño del bloque y para P2-P4 el número es constante.

Para cada uno de estos cuatro casos de control planimétrico (P1, P2, P3 y P4) el valor de μ_{XY} (precisión significativa) depende del tamaño del bloque, expresado por el número de longitudes de base " n_p ", viene dado por:

P1: $\mu_{XY} \approx (0.70 + 0.29 \log n_p) \sigma_o$ P2: $\mu_{XY} \approx (0.83 + 0.02 n_p) \sigma_o$ P3: $\mu_{XY} \approx (0.83 + 0.05 n_p) \sigma_o$ P4: $\mu_{XY} \approx (0.47 + 0.25 n_p) \sigma_o$

Ecuación 1. Valores de µXY para cada uno de los cuatro casos de reparto de apoyo planimétrico.

siendo:

- n_p es el número de pasadas del bloque.
- σ_o es el error medio cuadrático planimétrico del peso unidad.

Error estándar planimétrico del bloque:

 $\sigma_{B,PL} = \mu_{XY} \times m_b$

Error máximo planimétrico del bloque:

$$\varepsilon_{\text{maxB,PL}} = 2.54 \times \sigma_{\text{B,PL}}$$

Las normas para la precisión mostradas, son también válidas para una aproximación grosera, para bloques rectangulares, pero no para el caso extremo de una sola pasada.

Hasta aquí, las precisiones se han referido a puntos de enlace en las esquinas de los modelos. Los puntos simples, puntos en un modelo solamente, serán menos precisos. En el caso *d3* de la figura 2, la precisión de los puntos simples es $(1.33 \times \sigma_0)$ el error medio cuadrático planimétrico del peso unidad σ_0 , una disminución del 33%, un valor que puede también ser aplicado como guía en bloques de otros tamaños y con otros patrones de control.

En la misma publicación, Ebner también estudió el efecto en la precisión de puntos simples usando significativamente más de 4 puntos de enlace en cada modelo. El número de puntos de enlace tiene un pequeño efecto en la precisión de las coordenadas de puntos simples después del ajuste del bloque.



Figura 5. Resultados planimétricos de modelos independientes.

Ejemplo. Se dispone de un bloque constituido por 72 modelos (6×12). La escala de los fotogramas es 1:10000. Los modelos se han orientado en un instrumento analítico de primer orden, el error medio cuadrático planimétrico del peso unidad es de 6 μ m. Se pide: determinar la precisión planimétrica previsible del bloque ajustado por modelos independientes. Verificar las ecuaciones vistas en la figura 2- f3 para el caso de un bloque cuadrado.

Asumiendo que la disposición del bloque fotogramétrico constituido por 6×12 modelos es la siguiente:





Sustituyendo en las ecuaciones tendremos

P1: $\mu_{XY} = (0.70 + 0.29 \log 6) 6 = 5.55 \ \mu m \Rightarrow \sigma_{B,PL} = 0.055 \ m \Rightarrow \epsilon_{maxB,PL} = 0.141 \ m$ P2: $\mu_{XY} = (0.83 + 0.02 \ 6) 6 = 5.70 \ \mu m \Rightarrow \sigma_{B,PL} = 0.057 \ m \Rightarrow \epsilon_{maxB,PL} = 0.145 \ m$ P3: $\mu_{XY} = (0.83 + 0.05 \ 6) 6 = 6.78 \ \mu m \Rightarrow \sigma_{B,PL} = 0.068 \ m \Rightarrow \epsilon_{maxB,PL} = 0.172 \ m$ P4: $\mu_{XY} = (0.47 + 0.25 \ 6) \times 6 = 11.82 \ \mu m \Rightarrow \sigma_{B,PL} = 0.118 \ m \Rightarrow \epsilon_{maxB,PL} = 0.300 \ m$

Para verificar ambas ecuaciones se va a sustituir los valores en cada una de las ecuaciones vistas:

P1: $\mu_{XY} = (0.70 + 0.29 \log 6) \sigma_0 = 0.93 \sigma_0 \approx 1.00 \sigma_0$ (Figura 2- f3).

La diferencia entre 0.93 y 1.00 puede ser tolerable para estimaciones groseras de la precisión del bloque.

6.2.1.2. Altimetría

La precisión altimétrica después del ajuste del bloque puede ser derivada de una inversión de la matriz de ecuaciones normales, de la misma forma que para la precisión planimétrica. La relación análoga a la ecuación vista anteriormente en planimetría será por tanto:

$$\sigma_{\rm B,AL} = \sqrt{Q_{ZZ}} \, \sigma_{\rm 0} = \sqrt{Q_{\rm LL}} \, \sigma_{\rm M,AL}$$

La precisión altimétrica es primordialmente dependiente del número "i" de modelos entre dos cadenas de puntos de apoyo altimétricos (perpendiculares a las pasadas). También es buena práctica para mejorar la precisión altimétrica a lo largo de los bordes superiores e inferiores del bloque mediante la introducción de puntos de apoyo altimétricos en esos bordes a intervalos de i/2 modelos. El patrón ideal de control altimétrico es el mostrado por la figura 6.

La ecuación correspondiente a la precisión altimétrica es:

$$\mu_Z \approx (0.34 + 0.22 \text{ i}) \sigma_0$$

Ecuación 2. Valor de la precisión altimétrica (μ_Z).

donde:

- i puente entre perfiles altimétricos transversales.
- σ_o es el error medio cuadrático altimétrico del peso unidad.

Error estándar planimétrico del bloque:

$$\sigma_{B,AL} = \mu_Z \times m_b$$

Error máximo altimétrico del bloque:

$$\epsilon_{maxB,AL} = 2.54 \times \sigma_{B,AL}$$



Figura 6. Patrón ideal de apoyo altimétrico.

En la siguiente figura se muestra un gráfico de la precisión altimétrica, considerando varios casos de cadenas transversales de puntos de apoyo altimétricos (i = 5, 10, 15, 20 y 25).



Figura 7. Resultado altimétrico de modelos independientes.

FOTOGRAMETRÍA III

Ejemplo. Para el caso del ejemplo visto anteriormente y sabiendo que el error medio cuadrático altimétrico del peso unidad es de 9 µm, se pide determinar la precisión altimétrica previsible del bloque ajustado por modelos independientes.

Tomando la siguiente disposición (Fig. 7) para el apoyo altimétrico



Figura 8. Distribución del apoyo altimétrico en un bloque de 6×12 modelos.

i= 12: $\mu_Z = (0.34 + 0.22 \times 12) 9 = 26.82 \mu m$	$m \Rightarrow \sigma_{B,AL} = 0.268 \text{ m} \Rightarrow \epsilon_{maxB,PL} = 0.681 \text{ m}$
i= 6: $\mu_Z = (0.34 + 0.22 \times 6) 9 = 14.94 \mu m$	$\Rightarrow \sigma_{B,AL} = 0.149 \text{ m} \Rightarrow \epsilon_{maxB,PL} = 0.379 \text{ m}$
i= 4: $\mu_Z = (0.34 + 0.22 \times 4) 9 = 10.98 \mu m$	$\Rightarrow \sigma_{B,AL} = 0.110 \text{ m} \Rightarrow \epsilon_{maxB,PL} = 0.279 \text{ m}$
$i=2: \mu_Z = (0.34 + 0.22 \times 2) 9 = 7.02 \mu m$	$\Rightarrow \sigma_{B,AL} = 0.070 \text{ m} \Rightarrow \epsilon_{maxB,PL} = 0.178 \text{ m}$

Cuando comparamos con la precisión planimétrica, particularmente con el control denso (*P1*) a lo largo de los bordes del bloque, la precisión altimétrica es significativamente menos favorable. Un intervalo de alrededor 3 modelos entre cadenas de control altimétrico es el máximo si no deseamos introducir significativas pérdidas de precisión comparado con el modelo simple, pero entonces afectamos adversamente la economía del proceso entero. Es usual un intervalo de al menos cuatro modelos entre cadenas de apoyo, para conseguir un acuerdo entre precisión y economía. La introducción de datos de estatoscopio y GPS en el ajuste del bloque libera al ajuste de este restrictivo patrón de apoyo altimétrico.

En el interés de detección y localización de equivocaciones debemos introducir al menos 8 puntos de enlace por modelo, 2 en cada esquina y proporcionar puntos de control en grupos en lugar de puntos simples.

6.2.2. Precisión planimétrica y altimétrica en el ajuste de bloques por haces

Al igual que en modelos independientes se generalizaron los estudios teóricos a bloques cuadrados, con el apoyo distribuido como en los casos vistos en la figura 4 (P1, P2, P3 y P4). Al ser las precisiones planimétricas independientes de las altimétricas los resultados se tratan de forma independiente.

6.2.2.1. Planimetría

Los resultados para la precisión planimétrica se muestran en la ecuación 3 y figura 8 para el caso de tomas con recubrimiento longitudinal del 60% y transversal del 20%. Con las distribuciones del control P2, P3 y P4 el valor de la precisión μ_{XY} es función lineal del número de pasadas n_p

P1: $\mu_{XY} \approx 0.9 \sigma_{o}$ P2: $\mu_{XY} \approx (0.5 + 0.025 n_{p}) \sigma_{o}$ P3: $\mu_{XY} \approx (0.3 + 0.08 n_{p}) \sigma_{o}$ P4: $\mu_{XY} \approx 0.27 n_{p} \sigma_{o}$

Ecuación 3. Valores de μ_{XY} para cada uno de los cuatro casos de distribución de apoyo planimétrico.

6.2.2.2. Altimetría

Como en modelos independientes la precisión altimétrica es totalmente independiente del tamaño del bloque y el valor de la precisión " μ_Z " es una función lineal de la distancia del puente i, viene dado por la expresión:

$$\mu_Z \approx (1.00 + 0.18 i) \sigma_0$$

Ecuación 4. Valor de la precisión altimétrica (μ_Z).

6.2.3. Conclusiones

Respecto a planimetría:

- Con solo cuatro puntos de apoyo en las esquinas del bloque la precisión se resiente sensiblemente en el perímetro pero no en el interior (*Fig 1*).
- El inconveniente de la poca precisión en los bordes desaparece empleando puntos de apoyo a lo largo del perímetro del bloque (*Fig 2*). Cuanto mayor sea la densidad del apoyo, mayor será la precisión final. Los puntos de apoyo planimétricos tienen que estar situados en los bordes, con influencia en esta zona en la precisión.
- Cuando la separación entre puntos de apoyo es adecuada, el tamaño del bloque tiene poca influencia en la precisión. La separación entre los puntos de apoyo se expresa en dimensiones de la base (i = n B).
- Los puntos de apoyo en el interior del bloque no tienen influencia en la precisión, por tanto no resulta necesario colocar apoyo en el interior del bloque(Fig 3).
- Los vuelos cruzados mejoran la precisión, pero encarecen bastante el proyecto.

En altimetría:

- Las cadenas de puntos de apoyos altimétrico han de ser de dirección perpendicular a las pasadas, con una separación "i", que determinará la precisión.
- Los dos casos de recubrimiento lateral estudiados 20 y 60 %, demuestran que este último mejora la precisión un 40 % respecto del recubrimiento lateral del 20 y puede reducirse notablemente la cantidad de puntos altimétricos.
- El tamaño del bloque no influye en la precisión, si la separación "i" entre cadenas es adecuada.
- Se recomienda en el borde del bloque una serie de puntos de control altimétrico extra, con una separación "i/2" (Fig. 6), de esta forma se obtiene una mejor precisión.
- En el caso de recubrimiento transversal del 60%, la disposición óptima de los puntos de apoyo altimétricos es en forma de cuadrícula (*Fig. 9*).
- La separación entre cadenas de apoyo altimétrico no debe ser mayor de 10 bases (i≤10 base). Si la separación es menor o igual a cinco veces la base (i≤ 5 base), la precisión es del orden de 0.1 ‰ de H, siendo H la altura de vuelo.
- La separación de puntos en una misma cadena será de dos bases, en la zona de solape común a dos pasadas (*Fig. 10*).



Figura 9. Disposición optima de l apoyo altimétrico para p= 60%.



Figura 10. Separación del apoyo altimétrico en una misma cadena.

6.2.4. Detección automática de errores groseros

Estos métodos surgen cuando se generaliza el uso de la compensación de bloques aerotriangulados analíticamente ya que exigían la manipulación de cantidades ingentes de datos. Se diseñaron procedimientos rápidos y más o menos eficaces que detectaban este tipo de errores, con objeto de sustituir los métodos manuales utilizados en los ajustes polinómicos que implicaban repetir una y otra vez en ajuste.

La gran ventaja de la compensación por mínimos cuadrados reside en lograr la minimización de la suma de los cuadrados de las correcciones a las mediciones. Esta minimización resulta ventajosa si los errores presentes son solo de tipo accidental, pero resulta un inconveniente muy serio si están presentes errores groseros en las mediciones, afirma el profesor Juliá.

En otro trabajo se puede leer "El método de mínimos cuadrados es muy eficiente en ocultar grandes errores y en distribuir sus efectos sobre gran número de observaciones, tomándolos así irreconocible. Las mediciones erróneas no son precisamente las que presentan los mayores residuos después de la compensación.

Hoy día la mayor parte de los programas de ajuste tienen la posibilidad de detectar y eliminar automáticamente estos errores mediante el procedimiento de los *"Estimadores Robustos"* basados en el empleo de funciones que asignan pesos variables que permiten eliminar de forma relativa la influencia de estos errores en el cálculo.

La determinación relativa de los pesos de las observaciones se puede hacer en función de la magnitud de las correcciones (método danés).

6.3. Densidad y distribución de los puntos de apoyo

Hasta un cierto límite los distintos métodos de formación de bloques reaccionan de modo diferente según sea la distribución y densidad del apoyo. Con mucho apoyo, los métodos que emplean mayor número de ecuaciones de observación son los más susceptibles de producir mejoras de precisión.

Para estas comparaciones entre los distintos métodos es mejor expresar la precisión en micras a escala fotográfica.

Dada la distinta naturaleza de la propagación de los errores, es conveniente separar el estudio de la planimetría y altimetría.

6.3.1. Planimetría

En este caso la distribución más óptima es la perimetral. No es necesario situar puntos de apoyo planimétricos en el interior de bloque, ya que como se puede apreciar en el estudio de la figura 11-a (casos 4, 5 y 6) el hecho de dar algunos puntos en el interior del bloque no se compensa con una ganancia significativa en la precisión final. Se ha demostrado empíricamente (figura 11-a y 11-b situaciones 4, 5 y 6) que la precisión planimétrica no experimenta mejoría a partir de una determinada cantidad de puntos de apoyo.

La figura 11-b muestra los resultados experimentales llevados, a cabo con un bloque a escala 1:30.000 compuesto de 7 pasadas de 20 modelos cada una, para distintas densidades y distribuciones del apoyo. Estos resultados se expresan en función de residuos absolutos y han de usarse solo para comparación interna. De la figura 11-c se deduce claramente que para trabajos de escalas grandes la distribución más práctica es la de colocar puntos de apoyo cada 5 ó 6 modelos a lo largo del perímetro. Para trabajos de escala pequeña (del orden de 1:50.000) lo indicado sería puntos cada 15 ó 20 modelos.



Figura 11-a. Bloque objeto de estudio. Diferentes casos de distribución del apoyo.



Figura 11-c. Número de iteraciones efectuadas sobre cada caso del bloque.

6.3.2. Altimetría

Sabemos que la propagación de errores sistemáticos en altimetría es muy poco favorable para la precisión del ajuste; por tanto, el estudio de la ubicación de los puntos de apoyo altimétricos ha de hacerse con sumo cuidado.

Estudios empíricos recomiendan que se disponga de puntos de apoyo altimétricos (únicamente se conoce su cota) en el interior del bloque como se aprecia en la figura 12 en la que se ven tres cadenas

transversales de puntos de cota conocida regularmente espaciadas, es la situación apropiada para un ajuste de tipo polinómico de segundo grado. Con cuatro cadenas de puntos se podrían utilizar polinomios de tercer grado.

Dentro de cada cadena se pueden situar los puntos en pasadas alternas (figura 12), aumentando el apoyo en las cabeceras y finales de pasada. Se recomienda una separación mínima entre cadenas de 5 ó 6 modelos. En situaciones menos favorables (con separaciones mayores) se produce una caída importante de precisión (de aspecto lineal en el tramo comprendido entre 6 y 20 modelos). Disponiendo de apoyo en todas las pasadas (y no de forma alterna, como en la figura) se puede aumentar el intervalo entre cadenas entre 8 y 15 modelos, sin que ello suponga una merma importante de precisión con tal de tener un mínimo de 4 a 6 puntos en las pasadas superior e inferior del bloque.



Figura 12. Cadenas de apoyo altimétrico.

Se han hecho numerosos ensayos con objeto de estudiar la posibilidad de hacer pasadas transversales a intervalos regulares con la intención de emplearías para densificar el apoyo altimétrico, pero suelen dar problemas a la hora de integrarlas en un ajuste analítico de bloques (Smith, Miles y Verali). En uno de los casos que se exponen a continuación se dan una serie de normas para esta situación.

También se ha utilizado si procedimiento de sobrevuelo. Este consiste en apoyar topográficamente un vuelo mas alto con objeto de apoyar otro vuelo a menor altitud. La selección de puntos de enlace se hará en el vuelo bajo y luego por medio de un instrumento transferidos de puntos (tipo PUG) se pasen estos al vuelo alto y se leen en él sus coordenadas terreno (con todas las reservas que merece el método).

6.3.3. Configuración más idónea de los puntos de apoyo en el ajuste de bloques

En resumen podemos decir que para casos de vuelos con recubrimientos transversales del 20 al 30 %, el intervalo entre puntos de apoyo completos (X, Y, Z) puede muy bien estar comprendido entre 4 y 6 modelos (o bases) a lo largo del perímetro y para un control efectivo de la altimetría es necesario densificar en el interior del bloque con puntos de Z conocida de modo que en cada pasada tengamos un punto cada 4 bases o bien, formar cadenas verticales de puntos (situados en los solapes existentes entre las pasadas separadas también 4 o 5 bases, como se aprecia en la figura 13.



Figura 13. Distribución ideal del apoyo topográfico.

Si se trata de recubrimientos transversales del orden del 60 %, podemos reducir en buena medida el intervalo entre apoyo y es aconsejable formar una especie de cuadrícula como la que se da en la figura 14, manteniendo el intervalo de 4 bases entre puntos de cota conocida en sentido horizontal.



Figura 14. Distribución del apoyo con recubrimiento transversal del 60 %.

Puede darse también, el caso de tener que intercalar pasadas en dirección perpendicular a la zona en recubrimientos transversales de tipo convencional (20 - 30 %). Estas pasadas se denominan "pasadas de control" que se pueden aerotriangular independientemente con objeto de obtener apoyo para la aerotriangulación del bloque principal. En este caso la cadencia del apoyo puede ser la de la figura 15:



Figura 15. Introducción de pasadas transversales en el bloque.

Con intervalos mayores entre puntos de apoyo se reduce en gran medida la exactitud del bloque. Cuando el recubrimiento transversal está comprendido entre el 20 y el 30 % es cuando más atención hay que prestar a una bueno distribución de los apoyos altimétricos en el interior del bloque; de no ser así, podría resultar imposible el ajuste.

Bibliografía

- Ackermann, F, The use of camera orientation data in Photogrammetry- A review. Photogrammetria, vol. 42, 1987.
- Albertz, J, y Kreiling W., Manual fotogramétrico de bolsillo, Witcmann, H., Karlsruhe (1989), 4^a Edición, 3-87907-176-4.
- American Society of Photogrammetry. Manual of Photogrammetry, ASPRS, Cuarta Edición (1980), 0-937294-01-2.
- Brandstätter, G., Otero, J., Romero, P. y Sevilla, M.J., VI Curso de Geodesia Superior: Fotogrametría y Posicionamiento GPS, Realigraf S.A., Madrid, (1990), 84-87488-02-1.
- Burnside, C.D., Mapping from Aerial Photographs, Collins Professional, Londres, Segunda Edición (1979), 0-00-383036-5.
- Chueca P., M., Topografía, Dossat, Madrid (1982), Tomo II, 84-237-0591-9.
- Ebner, H., Self-Calibrating Block Adjustment, Bildmessung und Luftbildwesen, Heft 4, 1976.
- PE&RS, vol. 52(1):51-58, 1986.
- Ghosh, S.K., Phototriangulation, Lexingtong Books, Londres (1975), 0-669-98210-5.
- Ghosh, S.K., Analytical Photogrammetry, Pergamon Press, Oxford (1988), 2^a Edición, 0-08-036103-X.
- Heras, A.E., Apuntes de Fotogrametría Universidad Politécnica de Madrid EUITT).
- Krauss, K., Photogrammetry, Dümmler/Bonn (1993), 3-427-78684-6.
- Lerma, J.L., Problemas de Fotogrametría III, Servicio de publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia, 1999. ISBN 84-7721-805-6.
- Moffitt, F.H. y Mikhail, E.M., Photogrammetry, Harper & Row Publishers., New York (1980), 3^a edición.
- Shut, G.H., Selection of additional parameters for the bundles. PE&RS, 1979
- Shut, G.H., Block Adjustment of Bundles, The Canadan Surveyor, vol. 32(2)1980.
- Wolf, P.R, Independent Model Triangulation, PE&RS, vol. 56, nº 2, 1990, p. 1643.
- Wolf, P.R.; Dewitt, B. A, Elements of Photogrammetry with Applications in GIS, McGraw-Hill, EEUU, Tercera Edición (2000). 0-07-292454-3.
- Zhizhuo, W., Principles of Photogrammetry, (1990), 7-81030-00-8.
TEMA 7

INTEGRACIÓN DE TÉCNICAS GPS EN AEROTRIANGULACIÓN

7.1. Introducción
7.2. Sistema de coordenadas
7.3. Sistema GPS
7.4. El GPS en vuelos fotogramétricos
7.5. Determinación de la posición de la cámara 7.5.1. Problemas específicos
7.6. Diseño del bloque y puntos de control necesarios
7.7. Ajuste combinado de observaciones
7.8. Precisiones de bloques ajustados con *GPS*7.9. Aerocontrol
Bibliografía

7.1. Introducción

Con la aparición del sistema de posicionamiento global *(GPS)* se ha producido una revolución de la tecnología topográfica. Estas técnicas basadas en el posicionamiento por satélite se utiliza ya como sustituto de los clásicos puntos fijos en múltiples tareas topográficas y para la determinación de puntos de apoyo fotogramétricos puede beneficiarse también en gran medida de esta nueva posibilidad.

Tanto en fotogrametría analítica como analógica, en la fase de orientación absoluta son necesarias las coordenadas de puntos en el sistema terreno. Estos puntos han de ser identificables en la fotografía o modelo y nos servirán para determinar los parámetros de orientación exterior de los fotogramas aislados o de un modelo estereoscópico. La determinación de las coordenadas planimétricas y altimétricas de estos puntos se conoce con el nombre de apoyo en campo y a estos puntos como puntos de apoyo o de control.

Podemos definir el apoyo en campo como el conjunto de operaciones geodésicas y topográficas necesarias para determinar las coordenadas de los puntos necesarios para realizar la fase de orientación exterior o absoluta dentro del proceso fotogramétrico.

Los principales condicionantes de esta fase del trabajo son la topografía del terreno y los factores meteorológicos. La inaccesibilidad del terreno, la vegetación, la falta de visibilidad, etc., condicionan y dificultan los trabajos de observación. Por estas causas, los trabajos geodésicos y topográficos tienen gran incidencia en los plazos y los costos de los levantamientos fotogramétricos.

FOTOGRAMETRÍA III

Con el fin de agilizar los trabajos de campo, surgieron una serie de técnicas fotogramétricas que pretendían reducir dicha fase y que venían acompañadas de un desarrollo instrumental.

Se conoce como triangulación aérea al conjunto de técnicas fotogramétricas que, a partir de un mínimo número de puntos de apoyo y mediante mediciones efectuadas en los fotogramas o modelos, posibilitan realizar la orientación absoluta de los fotogramas, modelos de una pasada y conjuntos de pasadas, por determinación de los parámetros de orientación de manera directa o de las coordenadas terreno de puntos identificables en los fotogramas.

El apoyo en campo puede ser, por tanto, completo o bien con un diseño apropiado para aerotriangulación. Realizar el apoyo en campo de forma completa significa obtener en el terreno las coordenadas de todos los puntos necesarios para orientar todos los modelos estereoscópicos de un bloque.

En el apoyo en campo para aerotriangulación, más reducido, se obtienen en el terreno sólo parte de los puntos anteriores, ya que el resto se obtienen por métodos fotogramétricos.

Con el desarrollo del instrumental y de los procedimientos de cálculo, se ha establecido un alto nivel de precisión en la determinación de puntos por aerotriangulación, resultando más económico que los topográficos convencionales. Pero aún así, el mayor coste de los proyectos de aerotriangulación sigue siendo la fase de apoyo en campo, aunque ésta se haya visto reducida.

Mediante las técnicas existentes en el campo de la geodesia por satélite, se dispone de métodos e instrumental apropiado para situar puntos de apoyo. Si utilizamos los satélites de la constelación *Navstar*, se pueden alcanzar precisiones de centímetros y las mediciones se pueden realizar en cualquier lugar y a cualquier hora, incluso de noche. Además, no es necesaria la intervisibilidad entre los puntos, con lo que los condicionantes de la fase de apoyo en campo se reducen y, además dependen en menor grado de la meteorología y las horas de luz diurna.

El *GPS* para navegación en tiempo real no alcanza las precisiones requeridas en Fotogrametría. Sin embargo éste en modo diferencial tiene un alto potencial de precisión con los métodos de cálculo postproceso, lo que le hace altamente interesante para aplicaciones geodésicas o sensores en movimiento.

7.2. Sistemas de coordenadas

Se van a recordar las relaciones existentes entre las coordenadas rectangulares (X, Y, Z) obtenidas con GPS^{l} y las correspondientes coordenadas geodésicas (φ, λ, h) de un punto P. En la figura 1 se muestra el sistema de coordenadas geocéntrico cartesiano, con los ejes X, Y, Z. En este sistema el plano XY es el plano del Ecuador y el plano XZ es el plano de meridiano 0°, normalmente de Greenwich. Un punto P tiene las coordenadas geocéntricas X_p , Y_p y Z_p Si definimos un elipsoide de referencia podemos deducir la altitud geográfica φ_p , la longitud geográfica λ_p , y la altura elipsoidal h_p .

Normalmente se especifica el semieje mayor a y el aplanamiento del polo f, es necesario determinar el semieje menor b por medio de la expresión:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}(1-\mathbf{f})$$

El cuadrado de la primera excentricidad: $e = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2$

¹ El sistema de coordenadas terrestres geocéntricas adoptado por el GPS es el sistema WGS84 (Sistema Geodésico Mundial 1984).

Entonces tendremos:

El cuadrado de la segunda excentricidad: $e'^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1$ También sabemos que $S_p^2 = X_p^2 + Y_p^2$ y $\phi'_p = \arctan\left(\frac{a Z_p}{b S_p}\right)$



Figura 1. Sistema geocéntrico (X,Y,Z), sistema tangencial $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, coordenadas geográficas junto a la altura elipsoidal h.

La altura elipsoidal viene dado por la expresión:

$$h = \frac{S_p}{\cos \phi_p} - N_p$$

en la que N_p es el radio de curvatura de la vertical principal en la latitud geográfica φ_p (gran normal o normal principal) que define la curvatura del elipsoide perpendicular al meridiano:

$$N_{p} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^{2} \operatorname{sen} \phi_{p}}}$$

La longitud puede obtenerse a partir de $\lambda_p = \arcsin\left(\frac{Y_p}{S_p}\right)$ y la latitud por la expresión siguiente:

$$\phi_{p} = arctan \Biggl(\frac{Z_{p} + e^{\prime 2} b sen^{3} \phi_{p}^{\prime}}{S_{p} - e^{2} cos^{3} \phi_{p}^{\prime}} \Biggr)$$

La altura elipsoidal viene dado por la expresión:

$$h = \frac{S_p}{\cos \phi_p} - N_p$$

en la que N_p es el radio de curvatura de la vertical principal en la latitud geográfica φ_p (gran normal o normal principal) que define la curvatura del elipsoide perpendicular al meridiano:

$$N_{p} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^{2} \operatorname{sen} \phi_{p}}}$$

La transformación inversa, es decir el paso de (ϕ_p, λ_p, h_p) a (X_p, Y_p, Y_p) se define por medio de las siguientes ecuaciones:

$$X_{p} = K_{p} \cos \varphi_{p} \cos \lambda_{p} = (N_{p} + h_{p}) \cos \varphi_{p} \cos \lambda_{p}$$
$$Y_{p} = K_{p} \cos \varphi_{p} \sin \lambda_{p} = (N_{p} + h_{p}) \cos \varphi_{p} \sin \lambda_{p}$$
$$Z_{p} = (K_{p} - N_{p}e^{2}) \operatorname{sen} \varphi_{p} = \left[N_{p}(1 - e^{2}) + h_{p}\right] \operatorname{sen} \varphi_{p}$$

En fotogrametría es necesario, además, un sistema \overline{x} , \overline{y} , \overline{z} de coordenadas cartesianas locales, cuyo origen esté especificado aproximadamente en el centro del área de interés dentro del elipsoide *(punto N en la figura 1)* y con un eje \overline{y} tangente al meridiano que pasa por el punto N. El eje \overline{x} es perpendicular a este plano de meridiano, positivo hacia el Este. El eje \overline{z} es perpendicular a este plano de meridiano.

Las coordenadas \overline{x}_p , \overline{y}_p , \overline{z}_p de este sistema local tangencial de coordenadas son obtenidas a partir de las coordenadas geocéntricas X_p , Y_p y Z_p mediante una traslación espacial y una rotación.

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{x}}_{p} \\ \overline{\mathbf{y}}_{p} \\ \overline{\mathbf{z}}_{p} \end{bmatrix} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{p} - \mathbf{X}_{N} \\ \mathbf{Y}_{p} - \mathbf{Y}_{N} \\ \mathbf{Z}_{p} - \mathbf{Z}_{N} \end{bmatrix}$$

La matriz de rotación R se calcula a partir de la figura 1, teniendo en cuenta que los giros a realizar serán - $(90^{\circ}-\lambda)$ y $(90^{\circ}-\phi)$, resultando:

	$- \operatorname{sen} \lambda_{N}$	$-\cos\lambda_{_N}$	0	0	0	$- \operatorname{sen} \lambda_{N}$	$-\cos\lambda_{_N}sen\phi_{_N}$	$\cos \lambda_{_N} \cos \phi_{_N}$
R =	$cos \lambda_{_N}$	$- sen \lambda_{_N}$	0 0	$sen\phi_{\scriptscriptstyle N}$	$-\cos \phi_{N} =$	$\cos\phi_{\rm N}$	$- \text{sen} \lambda_{_N} \text{sen} \phi_{_N}$	$sen\lambda_{_N}cos\phi_{_N}$
	0	0	1	$cos\phi_{\rm N}$	$\operatorname{sen} \phi_{N}$	0	$\cos\phi_{\rm N}$	$sen\phi_{\scriptscriptstyle N}$

7.3. Sistema GPS

El GPS fue desarrollado por los EE.UU. (Air Forece Space System Division) para mejorar el sistema militar TRANSIT en servicio civil desde 1967. Desde 1973 se empezó a desarrollar el proyecto de la constelación NAVSTAR (NAvigation System with Time And Ranging; Global Positioning System – Satélite de navegación, cronometría y distanciometría; Sistema de Posicionamiento Global) para uso militar; sin embargo se tiene un acceso restringido destinado a fines de uso civil. La principal aplicación del GPS era la navegación de vehículos militares por tierra, mar o

aire, pero también puede ser utilizado en múltiples tareas topográficas civiles.

La configuración final de la constelación *NAVSTAR* se alcanzó en 1994, con un total de 24 satélites. Esta configuración prevé la posibilidad de observar las 24 horas del día simultáneamente desde al menos cuatro satélites en el horizonte en cualquier parte del mundo, permitiendo recibir las señales para navegación en tiempo real o en posterior proceso de datos. En la ex Unión Soviética (hoy en día principalmente Rusia) se está desarrollando el sistema *GLONASS (Sistema Global de Navegación por satélite)*, muy similar a *GPS. GLONASS* es considerado como un sistema complementario a *GPS* par aplicaciones futuras.



Figura 2. Constelación NAVSTAR.

La Fotogrametría está aprovechando el gran potencial del *GPS* para vuelos fotogramétricos y apoyo en campo. Distinguimos tres aplicaciones diferentes del *GPS* en vuelos fotogramétricos:

- GPS para navegación aérea.
- Determinación en vuelo de las coordenadas de los centros de proyección para su uso en aerotriangulación.
- Posicionamiento de sensores (para escáner multiespectrales, escáneres por radar/láser, vídeo, cámaras u otros sensores aerotransportados para Geofísica, Meteorología, etc.), combinado con sistemas inerciales.

El concepto básico de sistema de posicionamiento por satélite depende de la observación permanente de satélites en órbita terrestre desde estaciones de control en tierra. Los parámetros orbitales (efemérides) de los satélites, expresados en el sistema de coordenadas terreno geocéntricas, son luego calculados a partir de estas observaciones efectuadas desde las estaciones de seguimiento *(control)*. Hoy en día es posible, con la ayuda de estos parámetros, determinar las coordenadas geocéntricas de las posiciones de cada satélite en función del tiempo. Algunos de estos satélites son observados luego, en el mismo sistema de tiempo, desde nuevos puntos fijados en el suelo o próximos a éste. Dado que las posiciones de los satélites se conocen en el sistema de coordenadas geocéntricas en el momento de la observación, las coordenadas geocéntricas de los nuevos puntos pueden ser rápidamente calculadas a partir de las observaciones, que son esencialmente las distancias de los

nuevos puntos con respecto a los satélites.

El sistema de coordenadas *terrestres* geocéntricas adoptado por el *NAVSTAR-GPS* es el "Sistema geodésico mundial 1984" (WGS84). Otros sistemas de coordenadas *terrestres* geocéntricas han sido especificados basándose en los mismos satélites, pero bajo estaciones de control diferentes en tierra y en otros modelos matemáticos, por ejemplo, "el Marco europeo de referencia terrestre 1989", (ERTF 1989). En el WGS84, que es el modelo normalmente utilizado en las aplicaciones fotogramétricas, los parámetros de los satélites son actualizados entre 1 y 3 veces al día con una precisión de ± 10 m.

Cuatro satélites GPS están en órbita terrestre en cada uno de los seis planos orbitales, lo que nos da un total de 24 satélites. El periodo orbital es de aproximadamente 12^h que corresponden a un radio orbital de 26600 km. La inclinación de los planos en el ecuador es de 55°. Esta constelación asegura que las señales de al menos cuatro satélites sean recibidas en cualquier momento en cualquier punto de la superficie terrestre, al margen de posibles dificultades locales originadas por obstáculos como árboles, montañas, edificios, etc.

Cada satélite emite señales para calcular su posicionamiento. Estas señales consisten en dos ondas electromagnéticas portadoras de código:

- La onda L1, a una frecuencia de 1575,42 Mhz (longitud de onda = 19 cm)
- La *L2*, a *1.227,60 Mhz* (longitud de onda = 24 cm).

Ambas portadoras están codificadas mediante dos códigos: el de precisión código P (*Precise*) y el código C/A (course adquisition o estándar). El código P en un futuro sólo estará disponible para usos militares, pero por ahora está libre. El código C/A es generalmente accesible, aunque existe la posibilidad de que venga deteriorado, para reducir la precisión en casos específicos. Esta degradación de la precisión se denomina *SA* (selective availibility) y hasta el momento se ha activado y desactivado irregularmente. Lo más importante es que el código P tiene una longitud de onda equivalente de 30 m y el código C/A de 300 m (lógicamente sin *SA*) y que una señal puede ser medida con una precisión aproximada de 1% de su longitud de onda. Aquí está el potencial básico de precisión del *GPS*.

Señal	Frecuencia	Longitud de onda	Precisión
Canal L1	1575.42 Mhz	0.1905 m	1.9 mm
Canal L2	1227.60 Mhz	0.2445 m	2.4 mm
P- code	10.23 Mhz	29.31 m	0.29 m
C/A- code	1.023 Mhz	293.1 m	2.9 m

Tabla 1. Señales de GPS y precisiones de las distancias calculadas.

También se transmiten en baja frecuencia mensajes adicionales, como la identificación del satélite, la señal de tiempo, los datos de órbita, parámetros atmosféricos, estado de operatividad del satélite, etc. Con estos datos no se necesita información externa para el procesado de las señales.

El método más básico de posicionamiento es medir la distancia desde un receptor, ya sea este fijo o móvil, a todos los satélites visibles en ese momento. Esta distancia se calcula multiplicando la velocidad de la luz por la diferencia de tiempo entre la emisión por el satélite y la recepción por el receptor. Si determinamos la distancia desde el receptor a tres satélites, es fácil determinar la posición del mismo, por el método de intersección o trilateración, ya que la posición de los satélites es conocida.

El problema es la sincronización de los relojes, ya que el que se encuentra en el satélite es atómico, y por tanto muy estable (precisiones de 10^{-12} a 10^{-14}), y el del receptor es de cuarzo (precisiones de 10^{-8}). Por tanto, estas distancias no son muy precisas, por lo que se denominan *"seudodistancias" (Fig*

3). Ello es debido a la variación del estado de los relojes, que nos puede dar errores en las coordenadas de cientos de metros.

La solución pasa por tratar el estado de los relojes como una incógnita más y, para ello se necesita una observación a un cuarto satélite. La precisión interna del método, con errores estándar, se establece en el orden de 0,3 m (código P), 3 m (código C/A sin SA) y superior a los 30 m con SA.



Figura 3. Método de seudodistancias

Un segundo método denominado "*medida de fase*" (*Fig. 4*) opera midiendo directamente la fase de las ondas L1 y L2, desechando el código que portan. Es el método que permite mayor precisión, alrededor del 1% de la longitud de onda utilizada (*Tabla 1*), que para L1 es de 1.9 mm y para L2 de 2.4 mm. La medición de fase se basa solamente en el cálculo de la cantidad de desfase correspondiente al ciclo en el que llega al receptor. Sin embargo, el número de ciclos que ha completado la onda hasta llegar al receptor es desconocido y tendremos que determinarlo. Esta cifra se denomina "*ambigüedad de fase* = N" y es la incógnita del cálculo.



Figura 4. Método de medida de fase.

Es la ambigüedad de fase inicial la que hay que determinar como una incógnita adicional cuando comienza la medición, ya que de ahí en adelante el receptor realiza un recuento de las mismas hasta que haya algún tipo de interrupción. Hay que considerar que se introduciría una incógnita por cada

portadora y cada satélite. Este método se realiza por cálculo en post-proceso. Por esto, las observaciones de fase sólo pueden ser usadas para posicionamiento con un procesado posterior y no en tiempo real.

El principal problema que afecta a la precisión de las observaciones *GPS* son los errores sistemáticos. Estos pueden ser debidos a la posición y órbita del satélite, errores de reloj y de señal, refracción ionosférica y troposférica, errores de la antena del receptor, etc.

Si se desea eliminar estos errores, es necesario realizar diferentes correcciones por cálculo con observaciones redundantes y en post-proceso. Las estrategias para eliminar errores sistemáticos consisten en situar:

- Therefore the second durante mucho tiempo (varias horas) sobre el mismo punto.
- Dos receptores en modo relativo y que realicen observaciones simultáneas. Usando algoritmos de simples o dobles diferencias entre las observaciones comunes (métodos diferenciales), los errores serán eliminados.

7.4. El GPS en vuelos fotogramétricos

Entre las aplicaciones del *GPS* destacan las dirigidas a obtener la posición de vehículos, barcos y aviones en movimiento conocida como *Posicionamiento GPS Cinemático*. En el posicionamiento de cámaras aéreas o sensores, las condiciones de operación son muy diferentes que en tierra, ya que están condicionadas a que el vuelo fotogramétrico sea operativo. Las condiciones restrictivas se deben a que el receptor del avión está continuamente en movimiento y en tierra se debe utilizar sólo un receptor, por razones de operatividad, y éste puede estar a cientos de kilómetros, además de que la duración del vuelo se puede prolongar durante horas.

Brevemente puede decirse que en vuelos fotogramétricos se puede emplear el *GPS* en los modos siguientes:

- En navegación y tiempo real sólo necesitamos el código C/A y se puede realizar posicionamiento de 50 m para navegación.
- ^{ce} En navegación y tiempo real, si se reciben correcciones por radio mediante sistemas como el *OMNISTAR*, se pueden alcanzar precisiones menores a 2 m.
- Para la determinación de las coordenadas de la trayectoria del avión y finalmente las coordenadas de los centros de proyección, necesitamos aplicar el método relativo, con un receptor en vuelo y una estación de base, medición de fase y post-proceso, pudiéndose alcanzar en condiciones operativas precisiones de varios centímetros.

Las características que debe tener un receptor para ser utilizado a bordo de un avión, con el fin de determinar los centros de proyección en método diferencial cinemático, son:

- Tener al menos un total de cinco canales, para captar de forma continua y simultánea a cinco o más satélites si están visibles.
- Poder realizar observaciones en fase y seudodistancias.
- Es suficiente que las observaciones sean del tipo *L1* código *C/A* y fase *L1*.
- Realizar las observaciones en el momento de la toma de la fotografía o calcularse por interpolación menor de 0,2 segundos.

7.5. Determinación de la posición de la cámara

Para la determinación de las coordenadas de los centros de proyección, se realizará un vuelo fotogramétrico con un receptor GPS instalado en el avión y otro estacionado en una base de referencia en tierra (*Fig. 5*), que nos permita realizar cálculo diferencial. El receptor de tierra no es necesario que esté en la zona de vuelo. Con los últimos desarrollos en el software, se establece una distancia máxima entre el receptor instalado en el avión y la base de referencia menor de aproximadamente 500 km.



Figura 5. Adquisición de apoyo aéreo cinemático con GPS.

El receptor GPS y la cámara funcionan independientemente. Para posicionamiento, las observaciones de los receptores GPS se hacen a intervalos de tiempo constantes (0,5 a 1 segundo) y las exposiciones de la cámara se realizan de forma independiente, teniendo éstas últimas que referirse al mismo sistema de tiempo en el que se tengan las posiciones de la antena del receptor GPS (se tiene que tener en realidad las relaciones entre estos tiempos para poder determinar uno en función de otro).

De esta manera, en post-proceso por métodos diferenciales y combinando observaciones de vuelo y la estación base, se obtendría la trayectoria del avión con coordenadas cada 0,5 segundos. Las posiciones del centro perspectivo de la cámara se van a obtener posteriormente de la interpolación de los datos de la trayectoria del avión (*Fig. 6*)..



Figura 6. Interpolación entre datos GPS y exposición de la cámara.

FOTOGRAMETRÍA III

Para poder interpolar las posiciones de exposición de la cámara de las posiciones *GPS* de la trayectoria del avión, los momentos de exposición de la cámara y los momentos de observaciones de GPS se deberán unificar en una escala de tiempo similar. Con este fin, las cámaras *modernas (ZEISS LMK-2000, ZEISS RMK-TOP, Wild RC 20-30)* producen un impulso eléctrico justo en el momento en que la cámara realiza la exposición.

Los receptores GPS de diversos fabricantes (Astech, Trimble, Sercel, etc.) pueden procesar este impulso. Cuando llega al receptor, éste libera un registro/grabación del tiempo de recepción. De esta manera, los tiempos de exposición de la cámara y los de observación de GPS se producen en una misma escala de tiempo, por lo que las posiciones pueden ser interpoladas para los momentos de exposición de la cámara. El receptor GPS deberá tener un alto número de datos para que la posterior interpolación de los disparos se realice con precisión, de manera que registren cada época para intervalos inferiores a 1 segundo.

Por lo que respecta a la relación cámara-antena han de tomarse todas las precauciones para garantizar la geometría del conjunto. La Fig 7 muestra la geometría de la cámara y la antena *GPS* montada en el fuselaje del avión. En esta figura x, y, z representan el sistema tridimensional de coordenadas de la cámara; y x_A , y_A , z_A representan las coordenadas de la antena del *GPS* relativamente respecto al sistema de la cámara. El eje x de la cámara es paralelo al eje longitudinal del avión, el eje zes vertical y el eje y es perpendicular a los ejes x, z. Las coordenadas *GPS* de la antena deben ser referidas a las lentes de la cámara. Para hacer esto es necesario conocer la orientación angular de la cámara con respecto al sistema de coordenadas del espacio objeto. Es complicado determinar la corrección de la orientación angular por el uso de montajes de cámara giro-estabilizantes, lo cual permite rotaciones relativas entre la cámara y el avión.



Figura 7. Configuración de la cámara y la antena GPS.

Si la montura de la cámara es fija, los parámetros de la orientación angular de la cámara (ω , φ , κ) deben transmitirse directamente a la orientación angular del vector de la cámara a la antena.

Los diferenciales de rotación ($\Delta \omega$, $\Delta \varphi$, $y \Delta \kappa$) entre la cámara y el avión deben tenerse en cuenta para la determinación de la posición angular cámara-antena en el espacio objeto. Observar que incluso en el caso de montura fija habrá generalmente un ajuste ($\Delta \kappa$) para garantizar la cobertura fotográfica propia. Algunas monturas de cámaras, tienen la capacidad de medir los diferenciales de rotación y pueden ser almacenados por un ordenador.

Considerando cada diferencial de rotación de la cámara con respecto a la montura, cuando se mira del eje positivo hacia el origen, las ecuaciones de rotación cámara-antena con respecto al espacio objeto son:

$$\omega' = \omega - \Delta \omega$$
$$\varphi' = \varphi - \Delta \varphi$$
$$\kappa' = \kappa - \Delta \kappa$$

En estas ecuaciones ω , φ y κ parámetros angulares de la orientación externa de la cámara con respecto al sistema de coordenadas del espacio objeto; $\Delta \omega$, $\Delta \varphi$, y $\Delta \kappa$ son los diferenciales de rotación de la cámara con respecto a la montura; y ω' , φ' y κ' son las rotaciones del vector de la cámara a la antena con respecto al sistema del espacio objeto.

Determinaremos ω' , $\varphi' \neq \kappa' \neq$ tendremos la matriz M'. Las coordenadas de las lentes de la cámara las calcularemos con las expresiones siguientes:

X		X _{GPS}		X _A
Y	=	\mathbf{Y}_{GPS}	$-\mathbf{R'}^{\mathrm{T}}$	y _A
Ζ		Z _{GPS}		Z _A

En las ecuaciones anteriores, X, Y, Z son las coordenadas del espacio objeto de los centros de cámara; X_{GPS} , Y_{GPS} , Z_{GPS} son las coordenadas del espacio objeto de la antena del GPS; R es la matriz de rotación antes definida; y x_A , y_A , z_A son las componentes del vector cámara-antena como muestra la figura 7.

Cuando una montura de cámara no ofrece la posibilidad de medir los diferenciales de rotación, se consideran igual a 0, dando lugar a errores en el cálculo de la posición de las lentes de la cámara. Estos errores pueden minimizarse, montando la antena del GPS verticalmente sobre la cámara en el avión. La antena receptora deberá estar centrada sobre el centro de simetría de la cámara fotogramétrica, con unos pequeños desplazamientos (offset) que luego tendrán que ser tenidos en cuenta en el proceso de cálculo, en función de la dirección de la pasada e inclinación de la cámara. Lo ideal sería combinar el *GPS* con un sistema de navegación inercial *(INS)*.

Cuanto más pequeños son los diferenciales de rotación más pequeños serán los vectores antenacámara y por tanto los errores de posición de las lentes serán menores de 10 cm. Los valores de ω , φ y κ son necesarios para calcular la traslación, y la corrección offset de la antena se incluirá en el cálculo iterativo del ajuste analítico por haces.

Una vez finalizada la misión fotográfica, con registro de observaciones *GPS* en vuelo y en la estación de referencia, se realizará el cálculo, mediante software apropiado, de las baselíneas de la antena del receptor en el avión, mediante el método diferencial, determinando la trayectoria del avión en la misión fotográfica. Como hemos apuntado anteriormente, a partir de las coordenadas de la antena *GPS* y su hora de registro y relacionando estos datos con el momento en que se realizaron las exposiciones de la cámara, se procede a interpolar las coordenadas de los momentos de disparo.

A continuación se puede realizar la transformación de estas coordenadas desde el sistema *WGS84* al sistema de la estación de referencia, generalmente *UTM*, mediante observación *GPS* de vértices de la Red Geodésica Nacional y así poder efectuar el cálculo de los parámetros de transformación.

Estas coordenadas *UTM*, o bien las *WGS84* de la antena y la posición de la antena respecto a la cámara si se conoce, serán una observación más junto con las coordenadas placa (método haces de rayos) y coordenadas de puntos de control para el ajuste combinado de la triangulación aérea.

Este método sólo será efectivo si no se le imponen unas condiciones restrictivas de vuelo, lo cual tendría gran influencia en los costes económicos. Veamos algunos de estos condicionantes y su solución:

Distancia de la estación base de la zona de vuelo: Las empresas de vuelo normalmente tienen distintos proyectos en cartera esperando para ser realizados. Los vuelos fotogramétricos dependen en gran manera de las condiciones climáticas, por lo que según sean éstas se decide dónde se debe realizar un proyecto en una fecha determinada. Esto supone una dificultad en la predicción del próximo suelo. Además, puede ocurrir que si las condiciones climáticas son favorables, se realicen distintos vuelos fotogramétricos en un mismo día, aunque estos disten entre sí varios cientos de kilómetros.

La tripulación es la que decide, antes o después del despegue, qué zona del terreno será sobrevolada, siempre dependiendo de las diferentes condiciones que se den en ese momento. Por lo cual, es prácticamente imposible llevar siempre el receptor de referencia a la zona de vuelo específica, siendo necesario utilizar receptores en estaciones base alejadas de la zona de vuelo.

Pérdida de señales de los satélites: Por experiencia, se sabe que durante un mismo vuelo no siempre se puede garantizar la recepción de las señales GPS del satélite. No es posible elegir las condiciones de despegue en todos los aeropuertos, por ejemplo que se tenga que realizar y un despegue y viraje brusco. Los controladores de tráfico aéreo podrán exigir que se realice un giro lateral y un giro luego a la derecha justo después del despegue. Debido a ello, algunos o quizás todos los satélites pueden quedar ocultados durante los giros, con lo que se presentará el problema de ambigüedad de fase.

También durante los vuelos, los satélites pueden quedar ocultos durante los giros que hay que realizar para entrar en nuevas pasadas. Para evitarlo se deberían realizar virajes muy amplios con poca inclinación del avión, lo que dará lugar a un coste mucho mayor del vuelo, lo que no se podrá justificar desde un punto de vista económico.

7.5.1. Problemas específicos

El posicionamiento cinemático relativo de una cámara en un avión está afectado por algunos problemas específicos que resumimos a continuación:

- Desplazamiento cámara-antena GPS. El posicionamiento del GPS está referido a la antena instalada en la parte alta del avión y, finalmente habrá que reducirse al centro de perspectiva de la cámara en vuelo. El desplazamiento (offset) se define con los elementos Δx , Δy , Δz , que se tienen que medir directamente con el avión en tierra y, más tarde, hay que transformarlos en el sistema objeto de coordenadas. Para ello, la orientación del avión (cámara) tiene que saberse aproximadamente, bien sea midiendo las inclinaciones directamente o bien obteniéndolas después de un cálculo preliminar por aerotriangulación.
- Flujo de datos. La toma de datos con una alta frecuencia, necesaria para garantizar coordenadas por interpolación fiables para el momento de exposición de la cámara, implica un volumen considerable de datos a grabar a bordo y en el receptor fijo. Esto es inusual en los métodos geodésicos. Durante una misión aérea de fotografía el grabador GPS de datos y almacenamiento puede acumular hasta 20 o más Mbytes de datos.
- *Fase inicial de ambigüedad.* Para el cálculo diferencial necesitamos resolver el problema de la fase inicial de ambigüedad, que tiene que estar solucionado antes de iniciar el posicionamiento cinemático. En nuestro caso, con un receptor fijo y otro en el avión, se podría resolver mediante su cálculo, previo al despegue, por un método engorroso, que aquí no vamos a describir. Otro

método, mucho más práctico, consiste en partir de unas ambigüedades aproximadas, de manera que cada pasada, o parte de pasada, en que no se produzca pérdida de ciclos sea calculada en un sistema propio o, lo que es lo mismo, con un desplazamiento uniforme respecto al sistema general. El problema aparece retardado en el proceso de cálculo de la aerotriangulación. Entonces se tendrán que determinar estos desplazamientos (*shift*) y, corregirlos, Pero así conseguimos la operatividad en condiciones normales de trabajo.

Sistema de coordenadas de referencia, problema de datum. El posicionamiento del GPS se realiza en el sistema de coordenadas WGS 84. Es un sistema de coordenadas cartesiano cuyo centro coincide con el centro de la tierra. Si todos los puntos de control y todas las posiciones de GPS de la cámara están determinadas en ese sistema, no habrá problemas de datos en aerotriangulación combinada. Los resultados estarán, por descontado, en el sistema de coordenadas WGS84.

Generalmente, necesitaremos las coordenadas en el sistema geodésico nacional. La forma más fácil para realizar la transformación es, obteniendo las coordenadas de vértices en los dos sistemas, calcular una transformación espacial entre los dos sistemas o bien incluir dichas coordenadas en el ajuste combinado del bloque (aerotriangulación). Esta solución es buena planimétricamente, pero altimétricamente sería necesario disponer de datos del geoide, de un geoide local o al menos de una aproximación del mismo.

- Fallos de pérdida de ciclos, discontinuidades. Las observaciones por medio del método de medida de fase tienen que ser continuas durante el vuelo (incluyendo las grabaciones fijas de antes de despegar y después de tomar tierra). Estas son las condiciones para poder calcular la trayectoria del vuelo. Desgraciadamente, existen distintos tipos de interrupciones con las que hay que toparse, que son:
 - *Interrupción de señales:* La señal del satélite puede quedar interrumpida por diversas causas. Un ejemplo puede ser un giro de 180° con un gran ángulo de inclinación, lo que implica una sombra debida a las alas del avión.
 - *Fallos cíclicos*: Puede pasar a veces, sin causa aparente, durante la fase de observación, que la cuenta del ciclo total puede haber resbalado en el receptor entre unos pocos a unos miles de ciclos, aunque no se detecte a simple vista en la fase de observaciones. Los resultados de estos fallos en el ciclo son saltos en la trayectoria. Los fallos de ciclos son un problema del diseño del receptor y también pueden ser producidos por múltiples efectos de trayectoria o por discontinuidades en la ionosfera. Se han registrado fallos cíclicos incluso en los receptores fijos.
 - *Cambios en las Constelaciones:* Durante los periodos de observación de varias horas, los satélites pueden desaparecer del horizonte, así como aparecer otros nuevos. Por lo tanto, el número y la constelación de los satélites visibles está cambiando. Normalmente, muchos de estos cambios suelen ocurrir durante el vuelo.

El software GPS tiene que ser capaz de corregir estos fenómenos. El problema no es grave, siempre que 4 ó 5 satélites se mantengan sin perturbaciones y nos permitan reinsertar las señales interrumpidas o bien partir de unas ambigüedades aproximadas, sabiendo que finalmente las pasadas tendrán una precisión interna muy alta pero estarán afectadas de unos desplazamientos que habrá que corregir en el ajuste combinado.

El principal problema estriba en que la ambigüedad de fase tiene que ser recalculada. Hay varias maneras para solucionar este problema, que dependen de la información que queda sin perturbación en el sistema de observaciones. Si sólo 3 o menos satélites quedan libres de perturbaciones, el problema sería mayor.

7.6. Diseño del bloque y puntos de control necesarios

Como resultado de la misión fotográfica con apoyo aéreo cinemático, obtenemos las coordenadas absolutas de los centros de proyección de los fotogramas. Entonces tendremos un bloque de fotogramas para aerotriangular con un punto de apoyo (control) por cada imagen, esto es, un bloque completamente controlado. En estas circunstancias sólo necesitaríamos cuatro puntos de control en los extremos del bloque, que se utilizarían en el cálculo para el cambio de datum y la corrección de errores sistemáticos.

Pero lo que realmente obtenemos son coordenadas del centro de la antena en el avión en los momentos del disparo de la cámara. Además, las pasadas o subpasadas están afectadas por unos desplazamientos (*drift parameters*) y el sistema de coordenadas utilizado es el *WGS84*. En este caso necesitamos más puntos de control para que en el cálculo de la aerotriangulación podamos determinar las correcciones de excentricidad de la antena, los desplazamientos de cada pasada y corregir los errores sistemáticos producidos por estos efectos y los de orientación interior y medición de coordenadas.

La configuración de puntos de apoyo necesaria para corregir los efectos anteriores se reduce, según Ackermman, a cuatro puntos en los extremos del bloque y dos cadenas transversales de puntos altimétricos en el comienzo y el final del mismo. El tamaño de los bloques no tiene prácticamente influencia en la precisión de los mismos, pero se ha demostrado que estas cadenas de puntos transversales pueden ser sustituidas por pasadas de vuelo transversales a la dirección de vuelo principal, siempre que se realicen con los mismos requisitos de precisión.



Figura 8. Distribución de apoyo sobre bloques fotogramétricos

De esta manera, el bloque se configurará con las pasadas convencionales (*Este-Oeste* generalmente) y una serie de pasadas transversales, para así conectar cada una de las pasadas normales al principio y al final del bloque. Si el bloque fuese demasiado grande, se añadirían una serie de pasadas transversales en el centro del bloque para estabilizarlo y, a su vez, poderlo subdividir para realizar cálculos y ajustes parciales por aerotriangulación.

Estas pasadas transversales podrían ser reemplazadas por cadenas de puntos de control vertical, como se ha indicado anteriormente, pero la geometría del bloque sería más débil con respecto a la planimetría si lo comparamos con un bloque con pasadas transversales.

La situación de puntos de control se reduce entonces a las esquinas de los bloques, de manera que aparezcan en el máximo número de fotogramas de pasadas normales y transversales. Estos puntos de control es conveniente que estén formados por grupos de puntos y no puntos individuales, para garantizar su identificación y precisión.



Figura 9. Grupo de puntos de apoyo.

Asimismo, es interesante, para el control de calidad posterior a la aerotriangulación, situar una serie de puntos de control en el interior del bloque, para chequear el resultado relativo a la precisión.

Los bloques rectangulares o cuadrados son normalmente una excepción. Si un bloque presenta una forma irregular, se necesitarán más pasadas transversales, para así conectar cada una de las pasadas normales, al inicio y al final, con una banda transversal.



Figura 10. Ejemplo de bloque con geometría irregular.

Los bloques deberán tener una geometría interna buena, por lo que la selección, número y transferencia de los puntos tendrán que ser los correctos. Es, además, importante incidir en la correcta conexión entre las pasadas normales y las transversales y en la correcta identificación de los pocos puntos de control disponibles. Estos puntos, situados en las esquinas del bloque, deberán ser situados de manera que se puedan medir en tantas imágenes como sea posible, tanto en las pasadas normales como en las transversales. Como se ha indicado anteriormente, para una mayor seguridad y localización de errores groseros en el cálculo, se recomienda utilizar grupos de puntos de control (*Fig. 9*).

7.7. Ajuste combinado de observaciones

El ajuste combinado de diferentes tipos de observaciones es una herramienta muy poderosa en el proceso de datos, potenciada por el desarrollo de nuevas técnicas de medición, de ordenadores más potentes y de las teorías de ajuste combinado.

FOTOGRAMETRÍA III

La triangulación aérea es un ajuste combinado. Las diferentes observaciones a utilizar son: coordenadas placa o modelo, puntos de control, datos auxiliares y además, ahora, las coordenadas *GPS* obtenidas en vuelo.

El proceso de aerotriangulación es ya muy conocido. En su ejecución por métodos analíticos se encuentran las fases de preparación, medición y calculo. Éstos procesos son engorrosos frente a la simplificación en un flujo de trabajo completamente digital.

La aerotriangulación digital es una de las técnicas fotogramétricas con mayor capacidad de automatización. Aunque realmente no hay nada completamente automático, ya que se necesita una fase inicial de definición y final de comprobación importantes, se pueden automatizar las fases de elección de los puntos de enlace, numeración, transferencia, medición y cálculo, quedando entonces como fase completamente manual la identificación y medición de puntos de control. Después de realizar el proceso de aerotriangulación digital, hay que invertir bastante tiempo en el chequeo y depuración de los resultados.

La combinación del apoyo aéreo cinemático y la aerotriangulación digital, aprovecha al máximo las potencialidades de las dos técnicas. Por un lado, se planifica el vuelo mejor, se utiliza el *GPS* en navegación y toma fotográfica y se determinan las coordenadas de los centros de proyección para producir un gran ahorro en apoyo en campo. En aerotriangulación, el proceso de formación del bloque se acelera y la fase puramente manual se reduce a la medición de los puntos de control de las esquinas.

Las observaciones fotogramétricas pueden ser coordenadas modelo o placa, dependiendo del tipo de ajuste de aerotriangulación que se realice; por modelos independientes o haces de rayos (ver figura 1 l).

Los bloques se consideran convencionales en cuanto a solape y puntos de enlace, a excepción de las pasadas transversales que hay que incluir en los mismos.

Deberemos tener en cuenta dos precauciones al utilizar este método, la primera, es *recomendable* utilizar un ajuste de haces con autocalibración analítica cuando se usa el control de *GPS*. Con frecuencia debido a una inadecuada modelización de la distorsión de la refracción atmosférica, estricta imposición del calibrado de la distancia principal de la cámara serán causas de distorsiones y excesivos residuos en las fotocoordenadas. El uso de la autocalibración analítica eliminará ese efecto. La segunda, es esencial usar sistemas de coordenadas del espacio objeto para la reducción de datos. Las coordenadas *GPS* en un sistema de coordenadas geocéntrico serán convertidas en coordenadas planas locales para el ajuste. Después se completará la aerotriangulación, las coordenadas planas locales pueden ser convertidas al sistema deseado. Las elevaciones relativas al elipsoide las podremos convertir a elevaciones ortométricas usando un apropiado modelo de geoide.

Para procesar estos datos es necesario software especial, ya que los datos *GPS* se consideran como coordenadas brutas, con incógnitas asociadas como los *"drift"* correspondientes, derivadas de observaciones de fase y relativas a la antena del avión en el momento de la toma fotográfica. Las versiones anteriores de software de cálculo, como *PATB* o *BLUH*, sólo podían tratar estos datos como si fuesen coordenadas absolutas, con la misma precisión que el apoyo en campo.

7.8. Precisiones de bloques ajustados con GPS

Del análisis de los resultados presentados por Ackermann en su publicación "*Prospects of kinematic GPS for aerial triangulation*", podemos citar las conclusiones que se presentan a continuación:

• El resultado del método de apoyo aéreo cinemático *GPS* es como tener un punto de control en cada centro de proyección de cada fotografía, medido directamente y con precisión. Por lo tanto, los bloques quedan muy, bien controlados. También se puede afirmar que los bloques *GPS* no

tienen casi ningún error de propagación en los elementos de orientación, resultando un bloque tan preciso que se acerca a la precisión del cálculo de la intersección de rayos.

La precisión depende ligeramente del tamaño del bloque y, lo más importante, los puntos de control terrestre ya no se utilizan para conseguir precisión, ya que para ello se utilizan las coordenadas de los centros de proyección. La función de los puntos de control terrestre se restringe a la transformación de datum y a la corrección de errores sistemáticos.

Estas consideraciones generales hacen que la aerotriangulación con posicionamiento aéreo *GPS* sea muy interesante y con grandes perspectivas económicas.

Aún así hay que estudiar la influencia de los datos *GPS* en el resultado final de los bloques ajustados. Hay que cuantificar el hecho de que las coordenadas *GPS* no sean absolutas, sino afectadas por los parámetros de transformación *(drift parameters)* ya que repercute en la aerotriangulación debilitando la geometría del bloque y reduciendo la precisión del mismo.

Respecto a precisiones, del citado test se deriva que:

- 1.Los resultados del ajuste del bloque son del orden de la precisión de la medición a escala terreno.
- 2.La precisión de los puntos de apoyo en campo tiene muy poco efecto en la precisión de los bloques.
- 3.El tamaño de los bloques, con o sin parámetros de transformación (*drift*), tampoco tiene mucho efecto sobre la precisión de los bloques.

Con estos supuestos, sólo hay que estudiar la influencia de la precisión de las coordenadas GPS de los centros de proyección, en los casos de ajuste con cálculo de parámetros (*drift*) o sin ellos y bloques con apoyo en campo en los bordes o pasadas transversales.

Ackermann ha obtenido mediante simulación fórmulas para las precisiones de estos dos métodos básicos de triangulación aérea apoyada en *GPS*. Los siguientes errores medios cuadráticos $\sigma_{B,PL}$, $\sigma_{B,AL}$ (*Kraus, K., Photogrammetry*) han sido obtenidos para las configuraciones siguientes:



Figura 11. Configuración de bloques para areotriangulación con *GPS*. Izquierda con cadenas de puntos Altimétricos (*caso P4*). Derecha, con dos pasadas cruzadas.

a. Caso de cadenas de puntos altimétricos al principio y final del bloque (figura izquierda):

$$\sigma_{B,PL} = \pm 2.1 \times m_b \times \sigma_B$$

$$\sigma_{B,AL} = \pm 2.3 \times m_b \times \sigma_B$$

b. Para un bloque con pasadas cruzadas en cada extremo del bloque

$$\sigma_{B,PL} = \pm 1.5 \times m_b \times \sigma_B$$

$$\sigma_{B,AL} = \pm 2.0 \times m_b \times \sigma_B$$

FOTOGRAMETRÍA III

siendo:

- m_b denominador de la escala imagen.
- σ_B precisión en la coordenada imagen medida. Normalmente se toma el error medio cuadrático de la unidad de peso unidad obtenido en del ajuste de bloques por haces.

Las suposiciones en las que se basan las ecuaciones son:

1. Las Fotografías de ángulo amplio, es decir con distancia principal 15 cm. Con $\sigma_{\rm B} = 10 \ \mu m$ obtenemos para el caso $a \ \sigma_Z = \pm 0.15^{0}/_{00}$ de la altura de vuelo y en el caso $b \ \sigma_Z = \pm 0.13^{0}/_{00}$ de la altura de vuelo. Para las fotografías de ángulo normal, es decir con distancia principal 30 cm los errores altimétricos correspondientes son el caso $a \ \sigma_Z = \pm 4.6 \times m_b \times \sigma_B$ y en $b \ \sigma_Z = \pm 4.0 \times m_b \times \sigma_B$.

2. La precisión de los puntos de apoyo en tierra es de $\sigma_{X,Y,Z} = m_b \times \sigma_B$. Incluso si la precisión de estos puntos se mejora en un factor de 3, la precisión del bloque completo sólo mejora un pequeño porcentaje.

3. La precisión de los centros de proyección obtenidos a partir de las observaciones GPS es $\sigma_{0-GPS} = m_b \times \sigma_B$. Si la precisión de estos puntos se mejora en un factor de 3x, la precisión del bloque completo mejora sólo un 10%. Si se degradara la precisión de los centros de proyección en un factor de 10x, se traduciría en una reducción significativa de la precisión total del ajuste de bloques, hasta valores de $\sigma_{B, PL} \approx 3.5 \times m_b \times \sigma_B$ y $\sigma_Z \approx 5.0 \times m_b \times \sigma_B$.

Ejemplo: Un bloque compuesto de 6 pasadas y 20 modelos (*Fig. 12*) se ha aerotriangulado por *GPS*. Las coordenadas *GPS* se obtuvieron considerando la distribución del gráfico dado en la figura 11. La escala imagen es 1:20000 y la distancia principal de 150 mm. El error medio cuadrático del peso unidad es de 10 μ m, se pide:

- 1.La precisión que se espera alcanzar en el bloque en los puntos señalizados.
- 2.La precisión requerida en las coordenadas *GPS* de los puntos de apoyo (terrestre y aéreos, centros de proyección) para alcanzar la precisión del apartado anterior.
- 3.Si la precisión de los centros de proyección se degradase 10x, calcular la precisión a alcanzar en el bloque.

Para el caso *a* de la figura 11:

1. La precisión que se espera alcanzar en el bloque en los puntos señalizados.

Caso *a*:

$$\begin{split} \sigma_{B,PL} &= 2.1 \times 20000 \times 10 \ 10^{-6} = \pm \ 0.42 \ m \\ \sigma_{B,AL} &= 2.3 \times 20000 \times 10 \ 10^{-6} = \pm \ 0.46 \ m \end{split}$$

Caso *b*:

$$\begin{split} \sigma_{B,PL} &= 1.5 \times 20000 \times 10 \ 10^{-6} = \pm \ 0.30 \ m \\ \sigma_{B,AL} &= 2.0 \times 20000 \times 10 \ 10^{-6} = \pm \ 0.40 \ m \end{split}$$

2. La precisión requerida en las coordenadas GPS de los puntos de apoyo (terrestre y aéreos, centros de proyección) para alcanzar la precisión del apartado anterior.

Caso *a* y *b*:

 $\sigma_{X,Y,Z} = \sigma_{0-GPS} = m_b \times \sigma_B = 20000 \times 10 \ 10^{-6} = \pm 0.20 \ m$

3. Si la precisión de los centros de proyección se degradase 10x, calcular la precisión a alcanzar en el bloque.

$$\sigma_{B,PL} = 3.5 \times 20000 \times 10 \ 10^{-6} = \pm 0.7 \text{ m}$$

 $\sigma_{B,AL} = 5.0 \times 20000 \times 10 \ 10^{-6} = \pm 1.0 \text{ m}$



Figura 12. Bloque compuesto de 6 pasadas y 20 modelos

7.9. Aerocontrol

Se entenderá por "*aerocontrol*" la determinación de los parámetros de orientación directamente en el avión, en el momento de la toma fotográfica. En un primer paso podría ser un nuevo tipo de ajuste combinado de triangulación aérea, pero en la actualidad la determinación de los parámetros se puede realizar con tal precisión por sistemas inerciales, que la aerotriangulación puede ser sustituida para cámaras métricas convencionales.

La disyuntiva entre los métodos de determinación directa de los parámetros de orientación, mediante sistemas inerciales, e indirecta, mediante aerotriangulación, especialmente en su vertiente digital, se centra sólo en el caso de las cámaras aéreas analógicas, ya que los sensores aerotransportados y las cámaras digitales necesitan el sistema *INS/GPS* para su posterior orientación. Estas cámaras seguirán operativas por varios años y habría que considerar el método más efectivo para la orientación. Las dos técnicas utilizan datos *GPS* diferencial aerotransportado y por lo tanto, están afectados por las limitaciones que se han expuesto anteriormente.

La aerotriangulación digital (orientación inversa), a pesar de su alto grado de automatización, tiene el problema de que los datos finales para ser aceptados necesitan mucho tiempo de revisión y validación. Estas tareas se realizan de manera manual por personal cualificado, aunque en parte pueden ser sustituidas por rutinas automáticas.

Los sistemas inerciales (orientación directa) tienen el problema de la corrección de errores sistemáticos y del alto costo de los equipos. En cambio, ofrecen ventajas considerables, como una alta productividad y una reducción en los plazos, lo que finalmente se traduce en tina gran reducción del coste del proyecto.

Como conclusiones puede decirse que el apoyo aéreo cinemático y su combinación con aerotriangulación es una técnica muy depurada y que está siendo utilizada masivamente en proyectos fotogramétricos. En nuestro país no está muy extendido su uso debido a que hay pocas cámaras de última generación en el sector privado. Tampoco hay muchas empresas con licencias del software apropiado para procesar los datos por aerotriangulación con GPS. Generalmente, los organismos que demandan productos fotogramétricos tienen la filosofía de que al mismo precio prefieren apoyo en campo completo o, como mucho, aerotriangulación analítica. Es necesario resaltar que la aplicación de estos métodos está completamente operativa. El receptor base no tiene porqué estar en la zona de vuelo, pudiéndose instalar a grandes distancias de la misma. El receptor del avión puede conectarse poco tiempo antes de llegar a la zona de vuelo y las sombras durante el giro pueden ignorarse, puesto que cada pasada se trata por separado. Como se pueden añadir parámetros de corrección de errores dentro del ajuste, no hay problemas causados por las sombras dentro de la pasada o por señales interrumpidas que, de otra manera, interrumpirían el proceso.

El método ha sido probado eficientemente en usos prácticos en muchos proyectos, por lo que se puede afirmar que es un método robusto, operativo y económico, útil para la amplia gama de proyectos fotogramétricos, especialmente en combinación con la aerotriangulación digital.

Bibliografía

- Ackermann, F., Prospects of Kineniatic GPS for Aerial Triangulation, Stuttgart, ITC Journal, 1992-4.
- Brandstätter, G., Otero, J., Romero, P. y Sevilla, M.J., VI Curso de Geodesia Superior: Fotogrametría y Posicionamiento GPS, Realigraf S.A., Madrid, (1990). ISBN 84-87488-02-1.
- Colomina, I., GPS, Ins and aerial triangulation: What is the best way for the operational determination of photogrammetric image orientation, IAPRSS Vol. 32, Part 3, Munchen 9, 1999.
- Förstner, W., The reliability of Block Triangulation, PERS Vol. 51, nº 8, 1985.
- Gómez Molina, A., Aerotriangulación Analítica. Universidad Politécnica de Madrid, 1989.
- Gómez Molina, A., Consideraciones técnicas sobre el Apoyo Aéreo Cinemático, Topografía y Cartografía, nº 97, pp. 27-42, 2000
- Jerie, H.G., Accuracy of Aerial Triangulation, ITC Publication, Series A, 47, 1969.
- Krauss, K., Photogrammetry, Dümmler/Bonn (1993). ISBN 3-427-78684-6.
- Lerma, J.L., Problemas de Fotogrametría III, Servicio de publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia, 1999. ISBN 84-7721-805-6.
- Lucas, J.R, Aerotriangulation without ground control, PE&RS Vol. 53, 1987.
- Nuñez-García, A.; Valbuena ,J.L. y Velasco, J., GPS: La nueva era de la Topografía, Ciencias Sociales, Madrid. ISBN 84-87510-31-0.
- Wolf, P.R.; Dewitt, B. A, Elements of Photogrammetry with Applications in GIS, McGraw-Hill, EEUU, Tercera Edición (2000). ISBN 0-07-292454-3.
- Zhizhuo, W., Principles of Photogrammetry, (1990). ISBN 7-81030-00-8.

TEMA 8

MODELOS DIGITALES DEL TERRENO

8.1. Introducción 8.2. Definición de MDT 8.3. Estructura de datos de los MDEs 8.3.1. Estructura vectorial 8.3.2. Estructura raster 8.4. Métodos para la adquisición de MDEs 8.4.1. Levantamientos topográficos 8.4.2. Digitalización de curvas de nivel 8.4.3. Altímetros radar y láser 8.4.4. Fotogrametría 8.5. Geometría epipolar 8.6. Generación automática de modelos digitales del terreno 8.7. Métodos de interpolación 8.8. Factores que influven en la exactitud de los MDEs 8.9. Aplicaciones de los modelos digitales **Bibliografía**

8.1. Introducción

Los métodos para la elaboración de cartografía se basan en la idea de representar la información de la superficie de la tierra (características del terreno, grupos de objeto y diferentes tipos de anotaciones literales,...etc.) gráficamente en una hoja de un mapa. Así por ejemplo, la topografía es representada por medio de curvas de nivel, símbolos y anotaciones numéricas; la posición, forma y los rasgos de un objeto del terreno son representados por diferentes tipos de símbolos. El resultado de estos procedimientos es el mapa topográfico que uso común. Como consecuencia del desarrollo tecnológico de la informática (ordenadores, procesamiento de información, ...etc.) y el hecho de la creciente demanda originada de la producción y clientela, los caminos y procedimientos tradicionales cartográfico no será ya en breve el típico mapa topográfico en formato papel sino en formato digital (mapa digital), el cual proporciona datos para establecer de una base de datos del mapa o incluso un sistema de información geográfico. De esta forma la información puede almacenares, actualizarse, consultarse,....etc. fácilmente. La conjunción entre de la cartografía digital y las bases de datos numéricas, hacen posible la producción de mapas más flexibles, precisos, rápidos y automáticos. El

concepto de modelo digital del terreno surge con el desarrollo del plano digital.

El término *digital terrain model* se originó en el Laboratorio de Fotogrametría del Instituto de Tecnología de Massachussetts en la década de los años 50. En el trabajo pionero de (Miller y Laflamme -1958), s establecen los primeros principios del uso de los modelos digitales para el tratamiento de problemas tecnológicos, científicos y militares. En esta referencia se reconoce a la fotogrametría como la principal área de especialización en la generación de modelos digitales, y la principal áreas de aplicación eran en la ingeniería civil para el diseño de obras lineales (generalmente carreteras y autovías). Posteriormente sus usos se han ido extendiendo cada vez más a otras áreas. En los años 80 el gran potencial de aplicaciones de estos ya han sido suficientemente verificados en otras muchas áreas (ciencias de la tierra, generalmente).

Los Modelos Digitales de Terreno *(MDT)* son un tipo de modelos simbólicos en los que se intenta representar mediante un conjunto de datos numéricos la distribución espacial de una característica del territorio.

En 1988, Joly define a los modelos como una representación simplificada de la realidad en la que aparecen alguna de sus propiedades. Una característica fundamental de los MDT es su formato digital frente al analógico de los modelos clásicamente empleados en Cartografía, tal diferencia implica la necesidad de una codificación que lleva a la representación numérica de la variable a representar, pudiendo llegar a ser considerados como la versión digital de los mapas clásicos.

Con lo que respecta a la clasificación de los MDT puede citarse una clasificación relevante de estos realizada por Turner (1970) el cual distingue tres tipos básico: modelo icónicos, analógicos y simbólicos.

- Modelos icónicos, en los que la relación de correspondencia entre objeto y modelo se establece a través de propiedades morfológicas (un ejemplo de este tipo de modelos es una maqueta, donde se ha establecido una reducción del tamaño conservando las relaciones dimensionales básicas).
- Modelos análogos, que poseen algunas propiedades similares a la de los objetos representados pero sin llegar a ser una réplica morfológica de los mismos (podremos citar como ejemplo un mapa impreso).
- Modelos simbólicos, que intentan la representación del objeto mediante una simbolización matemática (geometría, estadística,...etc.). Como ejemplo puede citarse la representación de un edificio mediante la identificación y codificación en una estructura geométrica de sus elementos básicos.

Otra clasificación de modelos los divide en modelos digitales y modelos analógicos. La diferencia básica entre ambos radica en que los digitales están codificados en cifras, permitiendo de esta forma su tratamiento informático; son por tanto modelos simbólicos y para construirlos es necesario un proceso de codificación de la información. Por el contrario, los modelos analógicos son modelos físicos (maqueta, mapa convencional,...etc.).

8.2. Definición de MDT

Un modelo digital del terreno constituye una representación numérica de datos que representa la distribución espacial de una variable cuantitativa y continua. Esta variable por lo general representa las características topográficas de éste y expresadas mediante las coordenadas X, Y, Z de los puntos que las definen. Codificadas en forma y función y almacenadas en un soporte estable tal, que en procesos posteriores, permita, hasta en su caso más general, conocer su configuración, cuantificando y cualificando cada elemento, puntual, lineal, superficial y volumétrico, en cualquier orden o estructura geométrica, y que además aporte la adecuada metodología para actuar sobre él.

Esta definición tan genérica, comprende tanto los detalles planimétricos (naturales y artificiales del terreno), como sus alturas o elevaciones. Ahora bien, la diferente problemática, tanto en la captura como en la explotación de estos elementos (planimétricos y altimétricos) ha dado lugar a denominaciones más especificas y de entre ellas las más difundidas son: DEM (Digital Elevation Model); DHW(Digital Height Model). Estos son generalmente modelos altimétricos digitales, generalmente referenciados a mallas regulares y en cuyos vértices se asigna el valor de la coordenada altimétrica Z (*Fig. 1*). Estos modelos se crean generalmente por procedimientos fotogramétricos.



Figura 1. Mallas regulares para la representación de modelos altimétricos.

Un MDT debe cumplir dos condiciones adicionales, la primera es que debe existir una estructura interna de los datos que represente las relaciones espaciales entre los mismos y, por otro lado, es que la variable a representar debe de ser variable continua y de tipo cuantitativo. Por tanto, las variables a representar son extraordinariamente diversas, aunque la más frecuente sin duda es la representación de la cota o altitud de los puntos que definen la superficie de terreno que da lugar a los Modelos Digitales de Elevaciones (término que a menudo se emplea como sinónimo de MDT) y la representación de las pendientes denominados Modelos Digitales de Pendientes.

La definición general de MDT no hace referencia explícita a la variable representada que, por tanto, puede ser cualquiera que cumpla con los requisitos de la misma. Este aspecto, aunque en principio pueda parecer evidente, debe ser destacado ya que es habitual identificar los MDT con los MDE (modelos digitales de elevaciones) cuando, en realidad pueden ser representadas muchas otras propiedades del terreno.

8.3. Estructura de datos de los MDE

En general la unidad básica de información en un modelo digital de elevaciones es un punto acotado, definido por una terna compuesta por un valor de la altitud (Z) al que acompañan los correspondientes valores de X e Y. Las variantes a parecen cuando estos datos elementales se organizan en estructuras

que representan las relaciones espaciales y topológicas.

Mientras los mapas convencionales usan casi exclusivamente una única convención (curvas de nivel) para representar la superficie del terreno, en los MDE se han utilizado alternativamente formas alternativas diversas. Las estructura de datos en los MDE se han dividido históricamente en dos grupos en función de la concepción básica de la representación de los datos: raster y vectorial.

8.3.1. Estructura vectorial

La estructura de datos tipo vectorial se basa en entidades geométricas u objetos geométricos (puntos y líneas), que se definen por sus coordenadas. Las dos estructuras vectoriales más empleadas son por curvas de nivel o también llamadas estructuras de contorno (*Fig. 2*) y los TIN (*triangulated irregular network-red de triángulos irregulares*) (*Fig. 3*).

 Estructura de Contornos. La estructura básica es la polilínea definida como un vector de n pares de coordenadas (X, Y) que describe la trayectoria de las líneas isométricas (en el caso de los MDE, se trata de las curvas de nivel o isohipsas). El número de elementos de cada vector es variable.



Figura 2. Representación vectorial de un MDE por medio de curvas de nivel.

Redes de Triángulos irregulares (TIN). Esta estructura de datos se compone de un conjunto de triángulos irregulares adosados y que suelen identificarse por las siglas de su denominación inglesa TIN. Los triángulos se construyen ajustando un plano a tres puntos cercanos no colineales, y que los ángulos que forman los lados del triángulo sean lo más parecidos posibles (triángulos isósceles - triangulación de Delaunay-). Estos se adosan sobre el terreno formando un mosaico que puede adaptarse a la superficie con diferente grados de detalle, en función de la complejidad del relieve.



Figura 3. Representación vectorial de un MDE por medio de TIN.

8.3.2. Estructura raster

Las estructuras raster se basan en la representación del terreno por medio de estructuras matriciales regulares y constantes (Fig. 1). Dentro de este grupo se pueden distinguir las matrices regulares y las matrices de resolución variable.

• Las estructuras matricial regular es el resultado de superponer una retícula sobre el terreno y extraer la altitud media de cada celda, asociando dicho valor al punto medio de la misma. La retícula adopta normalmente la forma de una red regular de malla cuadrada (*Fig. 4 y 5*). En esta estructura la localización espacial de cada dato está determinada de forma implícita por su situación en la matriz, una vez definido el origen y el valor del intervalo entre filas y columnas.



Figura 4. Matriz regular cuadrada para la generación de un MDE.



Figura 5. Representación raster de un MDE por medio de una estructura regular de malla cuadrada.

Las matrices irregulares intentan solucionar uno de los principales problemas que tienen las matrices vistas anteriormente. Las matrices regulares emplean una cantidad de información constante por unidad de superficie, independientemente de la complejidad de la superficie a describir. En las matrices irregulares se intenta el agrupamiento jerárquico de las unidades elementales con el objeto de disminuir el número de elementos en las zonas de menor complejidad (aumentando el tamaño de los elementos) y aumentar el número de elementos en las zonas más complejas. El resultado final son matrices imbricadas jerárquicamente que permiten variar la resolución espacial, conocidas bajo el nombre de quadtree.

Se han propuesto otro tipo de estructuras como la representación por contornos mediante ecuaciones polinómicas (Miller y Laflamme, 1958), la representación perfiles propuesta por Yoli (1983), las secuencias de segmentos de Bézier fue propuesta por Walton (1989) con la principal ventaja de la reducción de los ficheros vectoriales, los polígonos irregulares adosado (Moore et al., 1988) o redes regulares hexagonales (Roerle, 1988), pero ninguna de estas estructuras se han llegado a emplear de forma generalizada como las anteriores.

8.4. Métodos para la generación de los MDEs

La generación de un MDE consta fundamentalmente de dos partes: en primer lugar la obtención de información de la superficie real, es decir el conjunto de cotas o coordenada Z de la superficie a modelizar y en segundo lugar la interpolación a partir de estas cotas "fuentes" de las demás cotas correspondientes al resto de la estructura del modelo. Dependiendo de la técnica empleada, la densidad de puntos disponibles es variable.

Los métodos básicos para la obtención de las cotas del terreno pueden dividirse en dos grupos:

- Métodos directos en los cuales las medidas se realizan directamente sobre el terreno real. Entre ellas podemos citar:
 - La toma directa de los datos por medio de levantamientos topográficos (estación total, GPS).
 - Uso de altímetros transportados radar o láser desde plataformas aéreas.

- Métodos indirectos cuando se utilizan documentos analógicos o digitales elaborados previamente. Pueden citarse entre otros:
 - La digitalización de las curvas de nivel de los mapas topográficos convencionales automatizada (escáner y vectorización) o manual (tableta digitalizadora o en pantalla).
 - Restitución fotogramétrica numérica, analítica y digital (automatizada o no).
 - Interfelometría radar (por ejemplo ERS-1).

8.4.1. Levantamientos topográficos

Los datos obtenidos por topografía se fundamentan en la representación del área de trabajo incorporando los puntos más significativos del terreno con relación a la escala de trabajo. Suele considerarse una técnica eficiente y precisa, pero los altos niveles de exactitud se consiguen con una elevada inversión en tiempo y equipos topográficos, por lo que este método suele limitarse a proyectos específicos de gran escala los cuales necesitan grandes precisiones.

Generalmente los equipos empleados son estaciones totales, aunque cada vez más se están utilizando las técnicas de Sistemas de Posicionamiento Global (GPS) para la captura de los datos, aunque esta técnica tiene una importante limitación, como son algunas zonas arboladas o con edificaciones donde la cobertura de satélites es pequeña (menor de 4) y en las cuales no se puede realizar correctamente el procesado de los datos. Por ello, en las zonas en las que predominen estas características los levantamientos se realizarán por técnicas de topografía clásica.

8.4.2. Digitalización de curvas de nivel

La generación de MDEs mediante digitalización desde una tableta ha sido uno de los métodos más utilizado para la representación de terreno en formato digital y aprovechar la cartografía existente. La principal desventaja que ofrece este método es la lentitud del proceso de digitalización y elevado coste del proceso, especialmente si se trata de cartografía con gran cantidad de información. Debido a ello, la digitalización automática ha sido una línea de investigación en constante desarrollo en los últimos años.

El proceso de digitalización automática consiste en la realización de las una serie de tareas, entre las que destacan: la captura de la imagen por medio de un escáner, tratamiento digital de la información capturada (filtrado), vectorización de la imagen, reconocimiento de los valores de las cotas por medio de un OCR, la edición y depuración de errores topológicos. El principal problema que plantea esta digitalización es que los originales suelen ser complejos, con mucha más información que la estrictamente deseable (curvas de nivel y puntos singulares). Las confusiones durante la fase de revisión y corrección hacen que sea muy lenta y costosa, hasta el punto de tener un rendimiento menor que la digitalización manual. Por ello, la digitalización manual sigue siendo un método utilizado frecuentemente para algunos proyectos de pequeña entidad.

8.4.3. Altímetros radar y láser

Algunos satélites han incorporado altímetros entre sus instrumentos, con lo que se hace posible, al menos teóricamente, el registro directo de los datos de altitud en formato digital. Estos altímetros son aparatos extremadamente precisos, el transportado por el satélite *ERS-1 (European Remote-Sensing Sattelite)* es un radar 13.8 GHz con un error nominal de apenas unos centímetros (Bruzzi y Wooding, 1990).

FOTOGRAMETRÍA III

Los altímetros radar se sustentan en los principios físicos esencialmente diferentes de la teledetección convencional. Los sensores ópticos reciben la fracción de luz reflejada por el suelo ante la radiación electromagnética del Sol; sensores pasivos (no emiten energía) y la energía que reciben depende del albedo del suelo para el rango de longitudes de onda con el que se trabaje.

El radar es activo: emite una radiación desde una antena emisora y, además, esta radiación es coherente, es decir, se trata de una luz de longitud de onda pura en la que crestas y valles de la onda electromagnética son absolutamente regulares. Debido a esta característica, el sensor puede distinguir el punto exacto en el que se encuentra la oscilación de la onda reflejada, la fase.

La medida de la fase es útil debido a la elevada frecuencia de trabajo: si un radar transportado por un satélite funciona a 6 GHz, la señal recorrerá solo 5 cm en el tiempo de una oscilación completa. Si el suelo está exactamente a 800 Km de distancia, los 1600 km de ida y vuelta corresponden a un número entero de ciclos y la onda recibida llagará en fase con la onda de salida. Si la distancia es de 800 Km y 1 cm, la onda llegará con un desfase del 40%, un 20% corresponderá al cm de viaje de ida y el otro 20% al del viaje de vuelta. Este desfase se detecta e el equipo receptor. La medida de la fase permite, por tanto, estimar las distancias con precisiones centimétricas.

El problema con el que se encuentra esta metodología es que la unidad mínima de medida puede ser un área relativamente extensa de terreno; si esta área es heterogénea generará reflexiones múltiples que se combinarán de forma que la fase resultante parece aleatoria e inutilizable. Por estos motivos el uso directo de altímetros ha tenido especial éxito sobre superficies homogéneas como en la medida de la topografía de la superficie marina y en el seguimiento de los hielos polares.

Los altímetros láser utilizados para el levantamiento topográfico están basados en el mismo principio: desde el satélite o avión se lanza un breve pulso hacia la superficie (apenas unos ns); una radiación de la energía es reflejada por la superficie y devuelta hacia una antena receptora. El tiempo transcurrido entre la emisión y la recepción del eco depende de la distancia entre la antena y el suelo.

Merece la pena destacar que la cobertura topográfica más completa disponible adquirida con estos métodos es la de Venus, donde. Hace algunos años, la misión Magallanes levantó una cartografía del planeta prácticamente completo. La nave Magallanes fue lanzada el 4 de mayo de 1989 y llegó a la órbita de Venus unos 15 meses más tarde, el 10 de agosto de 1990. Durante la misión (1990-1994) se cartografío el 98% del planeta con una precisión de aproximadamente unos 100 m. Combinando imágenes tomadas en diferentes órbitas del satélite fue posible también crear simulaciones tridimensionales de la superficie de Venus.

8.4.4. Fotogrametría

Las técnicas más empleadas para la generación de los modelos digitales de elevaciones son las fotogramétricas. La fotogrametría se basa en el análisis de pares estereoscópicos y extracción de la información de los mismos durante la fase de restitución, con ayuda de la visión estereoscópica. Entre los métodos fotogramétricos utilizados para la captura de la información (restitución fotogramétrica) puede hablarse de restitución numérica, analítica y digital. También pueden distinguirse los métodos en función del grado de automatización que introduzcan en el proceso de captura de la información, por ello, puede hablarse de métodos manuales, semiautomáticos y automáticos.

Generalmente en la generación de un MIDE el objetivo que se plantea es obtener una adecuada representación de la superficie del terreno con la menor cantidad posible de puntos. En el caso de malla regular la información obtenida se completa con información de líneas de ruptura¹, ancho de la malla y

¹ Aquellas líneas singulares que representan cambios bruscos en la pendiente y de la dirección del terreno.

otros elementos geomorfológicos de la zona.

Cuando la captura se realiza de forma manual es más laboriosa, lenta y por tanto costosa. No obstante, se considera un procedimiento de una elevada efectividad y con una gran precisión, ya que está basada en el principio de adquisición de pocos puntos, pero bien seleccionados y bien medidos.

Una consideración importante en la generación de un MDE es la relación escala/exactitud. En la cartografía convencional esta relación está perfectamente definida; la exactitud planimétrica viene definida por el límite de la apreciación visual 0,2 mm por el denominador de la escala ($\sigma_{XY} = 0.2 \text{ m}_k$), y la exactitud en Z se suele considerar como ¼ de la equidistancia en el mapa.

Si se emplea un sistema fotogramétrico digital y la captura se efectúa de forma manual hay que tener en cuenta las consideraciones efectuadas, si por el contrario el sistema de captura es automático el esquema de trabajo varía totalmente. En estos casos el tiempo de medida de cada punto se reduce drásticamente y el principio de captura es básicamente el de disponer de muchos puntos, aunque no estén en las disposiciones idóneas e incluso tengan errores de medida y aplicar a posteriori procedimientos estadísticos de filtrado de los errores con el objeto de obtener un modelo de calidad y en un menor tiempo. Posteriormente, se suele realizar una etapa de edición y depuración del modelo con la introducción de información complementaria (por ejemplo líneas de ruptura, estas normalmente suelen capturarse al mismo tiempo que los puntos que configuren el objeto de estudio).

Por tanto, la generación automática de un MDE es interesante económicamente aunque sea necesario un importante esfuerzo de edición, con la salvedad de las zonas altamente construidas o los MDE de gran detalle, en los que la generación manual aún sigue siendo competitiva tanto técnica como comercialmente.

Los sistemas fotogramétricos digitales permiten la generación de MDEs por técnicas automáticas o semiautomáticas. Los métodos empleados en la medición automática de las elevaciones de los puntos arbitrarios de las imágenes estereoscópicas para la generación automática de MDEs se basan en técnicas de matching² o análisis de correspondencia entre imágenes. Las dos variantes más habituales



Figura 6. Matching definido por ventanas locales.

² El término Matching se ha impuesto en la literatura especializada como la expressión más adecuada para expresar la correlación entre imágenes digitales en fotogrametría. Y expresa el establecimiento automático de la correspondencia entre escenas homólogas de dos o más imágenes digitales. Por tanto, aplicando técnicas *"image matching"* en dos imágenes podremos obtener DEM, es decir, reconstruir modelos tridimensionales.

son las llamadas matching a nivel de elementos: LSM (*Least Squares Matching - método de mínimos cuadrados-*) altamente precisos (error de 0.1 pixel) y los ABM (*Area Based Matching, ventanas definidas por niveles de grises, basados en ventanas locales -Fig. 6*) y FBM (*Feature Based Matching , formas extraídas de las imágenes –segmentación- , características obtenidas en cada imagen individualmente*), menos preciso (errores en el rango 0,3-0.4 pixel) pero más rápido y robusto. Además existen técnicas combinadas donde ese emplean diferentes tipos de matching para la obtención de las coordenadas de las imágenes de los puntos medidos.

8.5. Geometría epipolar

La mayor parte de los algoritmos de visión computerizada y fotogrametría digital parten de la premisa de que el par de imágenes estéreo se ha tomado según una geometría epipolar. Es decir, que las líneas de barrido del par son líneas epipolares. Esta condición se cumple cuando los dos ejes de la cámara de un sistema estereoscópico son paralelos entre sí y perpendiculares a la base (caso ideal de toma fotográfica).

El plano que pasa por los centros de proyección izquierda y derecha y el punto arbitrario P, es llamado plano epipolar que pasa por el punto P (*Fig. 7*). El plano epipolar que pasa por el punto principal es llamado plano epipolar principal. En un modelo fotogramétrico cada una de las imágenes izquierda y derecha tienen sus respectivos planos epipolares principales. La línea de intersección de un plano epipolar y el plano de la fotografía se llama rayo o línea epipolar.

En la figura 7 se presenta un par estereoscópico con geometría epipolar siendo O_1 y O_2 sus centros de proyección. El plano epipolar es definido por los dos centros de proyección y el punto objeto P. Las líneas epipolares e y e se definen de la intersección del plano epipolar y los planos de las imágenes.

En la mayoría de los casos, los dos ejes de toma de las fotografías no son paralelos ni perpendiculares a la base aérea ($\overline{O_1O_2}$), entonces es necesario la transformación de las imágenes a una posición en las que las líneas epipolares homólogas sean paralelas al eje abscisas del sistema de coordenadas imagen, es decir, que tengan la misma coordenada y. Las imágenes normalizadas deben ser paralelas a la base aérea y deben tener la misma distancia principal.



Figura 7. Geometría epipolar (Imagen Normalizada).

Se denomina imagen normalizada a aquella imagen construida con geometría epipolar en el espacio objeto, frente al concepto de imagen real que será aquella tomada en el momento de la exposición. La imagen que es paralela al plano XY del espacio objeto recibe el nombre de imagen verdaderamente vertical (imagen ideal). En Fotogrametría II, tema 8 se estudia con más detalle la geometría epipolar *(Fotogrametría II, 8.5).*

8.6. Generación automática de modelos digitales del terreno

Como ya se ha comentado en apartados anteriores, los sistemas fotogramétricos digitales optimizan las técnicas de medición de las coordenadas de puntos utilizando diversos tipos de combinaciones de matching mediante estrategias de geométricas como la geometría epipolar donde las imágenes son normalizadas y se reducen los espacios de búsqueda para los ajustes entre puntos homólogos, y estrategias de almacenamiento por pirámides de imágenes (imágenes almacenadas a distintos niveles de resolución *–Fotogrametría II, 6.7–*), con el objeto de reducir las ambigüedades que puedan producirse en las ventanas de búsqueda.

Los aspectos a considerar en la generación de los MDEs en fotogrametría son principalmente:

- El remuestreo de la imagen según una geometría epipolar (imágenes normalizadas).
- El empleo de las pirámides de imágenes.
- La utilización de métodos de matching a nivel de área y elemento.
- Las técnicas de reconstrucción de superficies.

En el remuestreo epipolar de la imagen tiene por objetivo la obtención de nuevas imágenes (imágenes normalizadas), en las que exista paralelismo entre las líneas epipolares y las filas de la imagen digital, de forma que el espacio de búsqueda par la identificación de los puntos homólogos se reduzca de una región bidimensional a una zona aproximadamente unidimensional, reduciendo significativamente el tiempo de cálculo. En esta fase, se suelen realizar otras correcciones, tales como la corrección por refracción atmosférica, por la curvatura terrestre y la distorsión radial.

En un modelo de imágenes normalizadas solamente existen paralajes horizontales, las paralajes verticales han sido eliminadas en procesos de orientación y por tanto la correlación es unidimensional, al tener todos los puntos homólogos idéntico valor para la ordenada de la imagen.

Para poder introducir la condición de geometría epipolar de una forma automática es necesario el introducir una estrategia de búsqueda de tipo jerárquico (de menor a mayor detalle). Un ejemplo de búsqueda jerarquizada de gran utilización lo constituyen las pirámides de imágenes así como el empleo de otros filtros de imagen de paso bajo.

Las Pirámides de imágenes (*Fig. 8*) son muy utilizadas en Fotogrametría como método para plantear un esquema de trabajo de aproximaciones debido a que el tamaño original de las imágenes dificulta (en algunos casos hasta impide) el trabajo con las imágenes a tamaño real.

En los niveles superiores de la pirámide de imagen (imágenes con menor resolución) el modelo digital de elevaciones obtenido refleja los grandes rasgos del modelo estableciéndose en función de aquellas zonas de la imagen que son lo suficientemente representativas como para plantear la resolución de los procedimientos de identificación automática de puntos. Tras esta primera aproximación se dispondrá de unas características morfológicas iniciales del terreno, lo cual permitirá la introducción de dicha información en el proceso de matching e ir refinando progresivamente los resultados.



Figura 8. Esquema de compresión HPC.

En la actualidad la mayoría de los programas de generación de MDE plantean un esquema mixto de matching empleando matching a nivel de elemento en las primeras iteraciones (niveles superiores de las pirámides) y a nivel de área en los últimos pasos, para el refinamiento del modelo.

En *matching a nivel de elemento (FBM)*, las aproximaciones iniciales no tienen porqué ser tan precisas como en los métodos a nivel de área. Además se eliminan problemas como, por ejemplo, las discontinuidades de profundidad y las oclusiones locales.

El *matching a nivel de área (ABM)* se utilizan en los niveles inferiores de la pirámide en los que ya se disponen de aproximaciones precisas (obtenidas a partir de los niveles superiores de la pirámide de imágenes y de modelos digitales de terreno) y en las que es necesario una mayor precisión para el refinamiento de; modelo (los métodos a nivel de elemento son menos precisos debido a la perdida de información que conlleva la necesaria etapa de extracción de elementos).

El matching final de los puntos homólogos se restringe geométricamente a las filas de la imagen (geometría epipolar) y a unos ciertos límites de paralaje, obteniéndose los elementos candidatos mediante un proceso basado en la utilización de técnicas de estadística robusta para la eliminación de discrepancias.

La fase de reconstrucción de la superficie tiene como objeto la incorporación de discontinuidades del terreno (líneas de ruptura, de pendiente), así como la corrección de errores groseros causados por los errores en la identificación de los puntos homólogos y la existencia de obstáculos 3D.

El sistema más utilizado para la reconstrucción de la superficie es la modelización de la misma mediante técnicas de elementos finitos, así como la introducción de los principios de la estadística robusta (considera los errores groseros) con el objeto de eliminar errores de altura en puntos aislados y detectar las discontinuidades.

En cada nivel de la pirámide, la identificación de los puntos homólogos proporciona una densa nube de puntos de los que conocemos sus coordenadas terreno. En el MDE se definen los puntos de una malla regular a partir de la nube inicial de puntos y mediante un procedimiento de elementos finitos bilineales, con 4 vecinos de malla por elemento. El proceso de interpolación considera la información de los puntos del terreno medidos, las curvaturas y las torsiones de los mismos.

Es importante la introducción de características morfológicas de la zona objeto del estudio (curvas y torsiones) de manera que sea posible obtener aquellas zonas en las cuales haya no haya sido posible la obtención de puntos de medida. La falta de esta información, que puede ser debida a una mala textura de la imagen o a la existencia de elementos singulares eliminados.

Los principales problemas son los valores de alturas erróneos debido a errores de matching, o bien por la existencia de elementos como árboles, casas, que producen alteraciones de la forma de la superficie del terreno. En segundo lugar pueden existir discontinuidades reales del terreno que deben ser detectadas, y tenidos en cuenta por medio de estimados los filtros de estimación.

Otros problemas en la generación fotogramétrica de los MDE son:

- Si el terreno está cubierto por vegetación o edificios, estos producen importantes problemas en la generación de un MDE a partir de fotogramas aéreos ya que existen partes del terreno que no son visibles y, por tanto, no se pueden medir de una forma directa. Este problema que es común, tanto para los métodos manuales como para los métodos automáticos, evidentemente afectan más a éstos últimos, puesto que, el operador interpreta la fotografía y sólo situará puntos de medida en aquellas zonas no cubiertas por la vegetación o en los espacios existentes entre los edificios, procedimiento imposible en el sistema automático que trabaja "a ciegas". La única posibilidad es la eliminación de elementos aislados, como por ejemplo, unos límites máximos de diferencia de paralaje entre puntos vecinos del modelo, por tanto, cuando se detecta un importante cambio de cota se considerará como un punto anómalo y será eliminado del modelo.
- La captura de línea de ruptura y otros elementos morfológicos es otro problema para la captura automática de información, necesitando aún una etapa de medida interactiva que aunque, ralentiza el proceso de generación del modelo, cuenta con la ventaja de la información semántica que introduce el operador en la interpretación de la imagen. No obstante, en la actualidad se está realizando un importante esfuerzo en la detección automática de líneas de ruptura de pendiente basadas en métodos de extracción de bordes.

8.7. Métodos de interpolación

Los modelos de malla regular requieren en su generación un segundo proceso, consistente en la realización de la interpolación, donde se calcula el valor de la variable elevación en los puntos de la malla del modelo a partir de los puntos medidos.

Durante la década de los 70, hubo debate acerca de los diferentes métodos de interpolación, actualmente esta cuestión ha perdido gran parte dé su interés, puesto que, se ha demostrado que siempre que el procedimiento de captura de la información (en cuanto a densidad y distribución) sea la adecuada, los métodos dan resultados muy parecidos.

Los métodos de interpolación pueden ser clasificados en tres grandes grupos:

- Métodos basados en el ajuste polinómico de elevado orden. Dentro de este grupo destacan los métodos destacan los métodos basados en las medias móviles y los planos tangenciales móviles.
- Métodos basados en la utilización de elementos finitos.
- Métodos basados en la aplicación de estimaciones estadísticas que operan con funciones de covarianza o las propiedades de correlación del terreno.
- Kriging, donde los cálculos son proporcionales a la inversa de la distancia y considera la variable en estudio como una variable regionalizada.

8.8. Factores que influyen en la exactitud de los MDEs

Los factores que influyen en la calidad de un MIDE y, por extensión, en la de los productos derivados son diversos, Entre los más importantes figura la fuente de datos original que, a su vez, determina el método de generación del MDE (restitución, levantamiento topográfico, digitalización de cartografía previa existente, ...etc.). La precisión de los MDEs dependerá principalmente de tres atributos de los datos originales utilizados en su generación: la exactitud, la densidad y la distribución. Habrá que añadir a lo anterior las características del terreno y el método empleado en la construcción del MDE.

El tamaño de la celda es uno de los factores que potencialmente tiene efecto más significativo en la exactitud de un MDE. Aunque es muy difícil considerar cada una de las variables por separado, ya que todas las variables están estrechamente relacionadas, por ejemplo en el caso extremo de una superficie llana y continua sin pendiente, no se perdería exactitud en el MDE aumentando el valor del tamaño de celdilla. Aunque generalmente, cuando que se ha estudiado como afecta una variable en la generación de los MDEs se ha mantenido inalterable las demás variables para poder realizar la investigación de una forma coherente.

Existen algunos trabajos donde se valora el error cometido en función de la naturaleza de los datos o en función de otros parámetros como es el intervalo de muestro en modelos de malla, pero cada uno de ellos se realiza en áreas y con métodos diferentes por lo que son difícilmente comparables. Entre los estudios encontrados destacaremos los siguientes, agrupados según el método de construcción del MDE.

Li, en, 1992, realizó un estudio del error en MDEs *según el intervalo de muestreo* para distintos terreno y con datos obtenidos por fotogrametría aérea a distintas escalas de trabajo. El principal objetivo de este trabajo era encontrar las relaciones entre el error y la densidad de puntos. Las principales conclusiones a la que se llego fue que el error y el intervalo de muestreo presentan una alta correlación en el MDE matriciales. La calidad puede ser considerablemente mejorada cuando se incluyen datos auxiliares, tales como líneas de ruptura *(breaklines)* en el proceso de construcción del MDE.

Pueden suceder errores residuales grandes (mayores de 4 veces la desviación estándar) pero con una frecuencia muy pequeña. Incluyendo los datos auxiliares estos errores se reducen significativamente especialmente en terrenos abruptos. El error está también correlacionado con la pendiente del terreno, incrementándose σ (error medio cuadrático) en zonas escarpadas.

Asimismo, el error obtenido a partir de dos grupos de datos diferentes de la misma zona puede ser bastante diferente, aún con el mismo intervalo de muestreo. Por consiguiente, según Li, es imposible determinar a priori el error que puede obtenerse con un grupo de datos con un intervalo de muestreo determinado aunque sí puede estimarse un rango de variación.

La *naturaleza de los datos* ha sido otro de las líneas de estudio. La construcción del MDE con imágenes de satélite comenzó de forma experimental con imágenes Landsat TM. En 1990 Mukai et al. utilizaron pares de imágenes Landsat para calcular altitudes en la zona de solapamiento entre dos órbitas. Los resultados que presentados fueron de $\sigma = 92$ m, lo que supone 3 veces el tamaño del pixel (30 m). La zona de estudio de 40x45 km y situada en los Alpes Centrales de Japón, posee un desnivel máximo de 2200 m. Para el cálculo del σ se utilizó un total de 60 puntos de control. Con posterioridad, Mukai et al consiguen (con las técnicas similares a las del anterior trabajo con imágenes Landsat) obtener partir de imágenes SPOT pancromáticas valores de ECM de $\sigma = 26$ m.

La construcción de MDE mediante radar tiene una buena muestra en el TOPSAR *(Topographic Synthetic Aperture Radar)* desarrollado por el *Jet Propulsion Laboratory* de California. El TOPSAR, en funcionamiento conjunto con el *JPL Aírcaft SAR*, adquiere imágenes cenitales de la superficie terrestre con una resolución horizontal de 5 m y con un error en la determinación de la altitud de 1 a 3 m, en función del tipo de relieve. El TOPSAR/AIRSAR es transportado por un DC-8 a una altitud típica de 9

km. El sistema está dotado de un sistema GPS para la localización, lo que permite un referenciación geográfica precisa de la trayectoria del vuelo y, por tanto, del conjunto de los datos medidos.

8.9. Aplicaciones de los modelos digitales

Los MDE son empleados en numerosas aplicaciones entre las cuales destacan la ingeniería civil, las ciencias de la Tierra, la gestión y planificación de recursos, la topografía y fotogrametría y, finalmente, las aplicaciones militares.

La ingeniería civil está principalmente interesada en el empleo de los MDE para el cálculo de movimientos de tierras (desmonte y terraplén) en el diseño de carreteras, planificaciones, cálculos de ocupación y volúmenes en construcción de embalses, presas y similares.

Las aplicaciones de las ciencias de la Tierra, en sentido amplio, se centran en funciones específicas de modelado, análisis e interpretación de la morfología terrestre. Esto incluye delimitación de cuencas, desarrollo de las redes de drenaje, modelos de corrientes hidrológicas, clasificaciones geomorfológicas, cartografía geológica, modelos de pendientes, insolación, geoide y geopotencial entre otros.

Otro campo algo más amplio de aplicación es la gestión y planificación de recursos, puesto que incluye distintas áreas como la teledetección, agricultura, ciencias del suelo, climatología, medio ambiente y planificación territorial y urbanística,...etc. Las aplicaciones más características en este área incluyen estudios de idoneidad del suelo para cultivos, apoyo a los procesos de clasificación en teledetección, modelos de dispersión de contaminantes y construcción de modelos numéricos de alta resolución en zonas urbanas, sombreados analíticos,...etc.

Los MDEs se han convertido en un tipo de información muy demandada en las disciplinas relacionadas con la topografía y la geografía. La topografía y fotogrametría contemplan la generación de MDE, junto con la evaluación de la precisión de los métodos, el estudio de errores y los controles de calidad. En el proceso de producción cartográfica se contemplan operaciones como la captura de datos topográficos o fotogramétricos, la edición y producción del propio producto (MDE, ortofotos), aseguramiento de la calidad mediante pruebas de control y verificación,etc.



Figura 9. Modelo digital con sombreado analítico (renderización).

Finalmente, en este rápido recorrido de aplicaciones falta el área militar, un consumidor cartográfico muy importante además de un significativo productor. Algunos aspectos de las operaciones militares dependen estrechamente de la fiabilidad y precisión del conocimiento de las elevaciones y pendientes de la superficie terrestre, El uso militar de los MDE combina facetas y métodos de todas las aplicaciones anteriormente mencionadas y, entre sus objetivos finales figuran análisis de intervisibilidad, visualizaciones 3D en los sistemas de dirección de armas, simulación de vuelos para entrenamientos, análisis de líneas de alcance de radar, etc.

Bibliografía

- Ackerman, F., Digital Photogrammetry. An addendum to the manual of Photogrammetry, ASPRS (1996). ISBN 1-57083-037-1.
- Ackerman, F., Digital Elevation Model. Techniques and Application, Qulity standars, development, International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing, vol 29 (B4), pp. 461-463.
- American Society of Photogrammetry. Manual of Photogrammetry, ASPRS, Cuarta Edición (1980). ISBN 0-937294-01-2.
- Delgado, J., Fotogrametría Digital, Universidad de Jaén (2001). (Pendiente de publicación).
- Felicísimo, A. M., Modelos Digitales del Terreno, Pentalfa, Oviedo (1994), 84-7848-475-2. http://www.etsimo.uniovi.es/~feli/SIG/ICA95.html.
- Krauss, K., Photogrammetry, Dümmler/Bonn (1993), 3-427-78684-6.
- Li, Z., Variation of de accuaracy of digital Terrain models with sampling interval, Photogrammetric Record, (1992).
- Li, Z., Effects of Check Point on the Reliability of DTM Accurancy Estimates Obtained from Experimental Test, PE&RS, vol 54, nº 10, 1991.
- Moffitt, F.H. y Mikhail, E.M., Photogrammetry, Harper & Row Publishers., New York (1980), 3^a edición.
- Standards for Digital Elevations Models, U.S. Departament of the Interior. U.S. Gelogical Survey National Mapping Division. http://mapping/usgs.gov/standards/index.html.
- Wolf, P.R. y Dewitt, B.A., Elements of Photogrammetry with Applications in GIS, McGraw-Hill, EEUU, Tercera Edición (2000). ISBN 0-07-292454-3.
- Zhizhuo, W., Principles of Photogrammetry, (1990). ISBN 7-81030-00-8.
TEMA 9

LA RECTIFICACIÓN DE FOTOGRAMAS

9.1. Introducción
9.2. Fundamento de la rectificación
9.3. Desplazamiento debido al relieve
9.4. Métodos de rectificación
9.5. De la rectificación a la ortofotogrametría
Bibliografía

9.1. Introducción

Por rectificación se conoce el proceso fotogramétrico mediante el cual se puede transformar una imagen en una proyección del terreno, por medio del enderezamiento del eje del fotograma. La rectificación corrige los desplazamientos existentes en la imagen fotográfica original producidos por la inclinación del eje de la toma.

Su desarrollo se ha debido principalmente a las aplicaciones en las fotografías aéreas como un método muy rápido para actualizar cartografía. En la actualidad puede aplicarse a un gran número de imágenes (radar, multiespectrales, digitales, etc.). Es una técnica que permite obtener *pseudomapas* de zonas en las que la fotografía clásica no puede hacerlo.



Figura 1. Enderezamiento de un fotogramas.

La imagen rectificada debe tener las características geométricas de una proyección ortogonal del objeto fotografiado sobre un cierto plano y a una determinada escala. Se presupone que el objeto es plano y vertical.

Para poder realizarse una rectificación se han de cumplir dos condiciones:

- Ángulo de inclinación de la toma tiene que ser muy pequeño (3°).
- El terreno tiene que ser prácticamente horizontal y llano.

9.2. Fundamento de la rectificación

Para el caso de una fotografía aérea vertical, el valor del ángulo *i* (*Fig. 1*) suele ser del orden de 1^g a 3^g , y excepcionalmente puede tomar valores de 4^g . Las fórmulas que definen la reproducción de la perspectiva central son las ecuaciones de colinealidad:

$$x' = -c \frac{m_{11}(X - X_{o}) + m_{12}(Y - Y_{o}) + m_{13}(Z - Z_{o})}{m_{31}(X - X_{o}) + m_{32}(Y - Y_{o}) + m_{33}(Z - Z_{o})}$$
$$y' = -c \frac{m_{21}(X - X_{o}) + m_{22}(Y - Y_{o}) + m_{23}(Z - Z_{o})}{m_{31}(X - X_{o}) + m_{32}(Y - Y_{o}) + m_{33}(Z - Z_{o})}$$

Estas ecuaciones contienen seis incógnitas y relacionan los parámetros de orientación externa, lastres traslaciones ω , φ , κ , función de los parámetros a_{11} , a_{12} ,..., a_{13} , las coordenadas del centro de proyección X_0 , Y_0 , Z_0 y las coordenadas terreno de los puntos de apoyo X, Y, Z.

En el caso de que el terreno sea horizontal, condición que implica que la coordenada Z sea constante, el problema puede tener una solución única, dado que el conocimiento de las direcciones que nos permite conocer el sistema de ecuaciones anteriores, tendría distintas soluciones al proyectarse la perspectiva central sobre un plano y dentro de los infinitos planos solución habrá uno que nos de la relación de escala buscada.

La determinación de los ocho coeficientes que permiten obtener la solución de las relaciones entre dos planos, la podemos expresar por las ecuaciones de la transformación bidimensional proyectiva, siendo las expresiones:

$$X = \frac{a_1 x' + b_1 y' + c_1}{a_3 x' + b_3 y' + 1}$$
$$Y = \frac{a_2 x' + b_2 y' + c_2}{a_3 x' + b_3 y' + 1}$$

donde x', y' son las coordenadas imagen, $X \in Y$ las coordenadas del plano y los coeficientes $a, b \in c$ son proporcionales a las ecuaciones generales de la perspectiva central.

Si se conocen las coordenadas de un punto sobre el plano y las correspondientes sobre la fotografía pueden establecerse dos ecuaciones, en las cuales, los coeficientes a, b y c son las incógnitas; con cuatro puntos se formarían un total de ocho ecuaciones que permitirían obtener una solución única del sistema de ecuaciones que se formara.

9.3. Desplazamiento debido al relieve

Se ha establecido como requisito indispensable para poder realizar correctamente una rectificación el disponer de un terreno horizontal y llano, por supuesto siempre dentro de unos ciertos límites de tolerancia, que vienen impuestos por los errores admisibles en la proyección, debido a los desplazamientos del relieve.

El desplazamiento del relieve se ilustra en la figura 2, donde se representa una toma fotográfica vertical tomada a un altura media de vuelo de valor H. La distancia principal de la cámara es c y O es el centro de proyección de la toma. La imagen del punto P sobre el terreno de altura h queda representado sobre el plano de la imagen por p. Un punto imaginario P' es localizado en la vertical del punto P, sobre el plano de referencia (terreno), y sus correspondiente posición sobre la imagen viene dada por p'.

En la figura se observa que el desplazamiento del punto P producido por el relieve h viene dado por en la imagen por el segmento $rr' = (\Delta r)$, siendo un desplazamiento radial desde el punto principal. Lógicamente cuanto más alejado estemos del centro de la fotografía mayor será la magnitud de dicho desplazamiento.



Figura 2. Desplazamiento en el plano de la imagen debido al relieve.

De la figura se deduce las expresiones siguientes:

$$\frac{R}{r} = \frac{H-h}{c} \implies Rc = r(H-h)$$
$$\frac{R}{r'} = \frac{H}{c} \implies Rc = r'H$$

Igualando las dos expresiones anteriores tendremos:

$$r(H - h) = r'H \implies H(r - r') = rh$$

Sustituyendo en la expresión $\Delta r = r - r'$ tendremos:

$$\Delta r = \frac{r h}{H}$$

siendo Δr el desplazamiento producido en la imagen por el relieve del terreno, h la altura del objeto, H la altura de vuelo y r la distancia radial sobre la fotografía desde el punto principal al punto desplazado.

Esta ecuación expresa el desplazamiento del relieve para fotogramas verticales. Observando la ecuación se deduce que el desplazamiento debido al relieve aumenta con el incremento de la distancia radial y también incrementa con el aumento de la altura de los objetos.

9.4 Métodos de rectificación

La rectificación puede ser analítica o gráfica, teniendo en ambos casos la obtención de un documento cartográfico, enderezando un solo fotograma. La rectificación puede realizarse punto a punto o de forma global.

Básicamente hay cuatro métodos que permiten corregir el desplazamiento introducido sobre una fotografía por la inclinación del eje de la toma, estos son:

- Técnicas gráficas
- Transformaciones matemáticas
- Métodos mecánicos de retroproyección
- Transformaciones ópticas.

La rectificación basada en transformaciones matemáticas se basa en la utilización de la transformación bidimensional proyectiva.

$$X = \frac{a_1 x' + b_1 y' + c_1}{a_3 x' + b_3 y' + 1} \qquad Y = \frac{a_2 x' + b_2 y' + c_2}{a_3 x' + b_3 y' + 1}$$

Las transformaciones ópticas son las que han estado siendo más utilizada en el pasado. Los otros métodos básicamente se basan en la rectificación punto a punto, mientras que por procedimientos ópticos la rectificación se efectuaba por medio de un rectificador y ésta era global. Con este instrumento todos los puntos eran transformados instantáneamente



Figura 3. Rectificación gráfica.







Figura 4. Rectificación óptica.





Figura 5. Izquierda, rectificador Zeiss SEG-5. Derecha, efecto de los ajustes en el rectificador.

9.5. De la rectificación a la ortofotogrametría

Se ha visto en anteriores apartados que la rectificación de fotogramas se puede realizar siempre y cuando se partan de imágenes adquiridas con inclinaciones muy pequeñas y considerando el terreno practicante horizontal y llano o asumiendo que los desniveles existentes no superan los errores admisibles de la escala de proyección.

Admitidas unas tolerancias para las desviaciones producidas por el relieve, si estas son sobrepasadas, la rectificación daría valores errónea Para que fuera válida habría que rectificar uno a uno todos los rayos del haz perspectivo.

Ante la imposibilidad evidente de llevar a cabo esta tarea, se puede hacer una rectificación de un conjunto de puntos (línea o superficie). Esta rectificación llamada rectificación diferencial es la idea general de la ortoproyección.

La rectificación de imágenes satélite (Spot, Landsat, etc.) es posible en mayor número de casos que las imágenes aéreas debido a que la altura de vuelo H es muy grande, resultando que los valores de los desplazamientos introducidos por el relieve (Δr) son muy pequeños, haciendo posible que puedan en mayor medida entrar en tolerancia.

En la actualidad la mayoría de las rectificaciones que se realizan esta relacionadas con la rectificación de elementos arquitectónicos, como por ejemplo el alzado de una fachada donde no existen grandes variaciones de distancias al punto de toma (profundidades), de los planos que forman el mismo.

Bibliografía

- American Society of Photogrammetry. Manual of Photogrammetry, ASPRS, Cuarta Edición (1980). ISBN 0-937294-01-2.
- Clavo, D., Fotogrametría II. (EPM EUITT).
- Curso sobre técnicas fotogramétricas y sus aplicaciones, CEDEX (MOPTMA), Madrid (1994).
- López, S., Fotogrametría, Egraf S.A., Madrid (1980). ISBN 84-300-2559-6.
- Krauss, K., Photogrammetry, Dümmler/Bonn (1993), 3-427-78684-6.
- Wolf, P.R. y Dewitt, B.A., Elements of Photogrammetry with Applications in GIS, McGraw-Hill, EEUU, Tercera Edición (2000). ISBN 0-07-292454-3.

TEMA 10

ORTOFOTOGRAMETRÍA DIGITAL

10.1. Introducción
10.2. Rectificación de imágenes digitales
10.3. Métodos de rectificación de imágenes digitales
10.3.1. Rectificación polinómica
10.3.2. Rectificación proyectiva
10.3.3. Rectificación diferencial
10.4. Esquema de la generación de ortoimágenes
10.5. Técnicas de remuestreo
10.6. Calidad de la imagen ortofotográfica
10.7. Correcciones radiométricas
10.8. Confección de mosaicos
10.9. Estereo-ortofotogrametría digital
10.10. Propiedades de las ortofotos digitales
Bibliografía

10.1. Introducción

La representación fotográfica del terreno debido a su mayor riqueza informativa resulta ventajosa en numerosas aplicaciones respecto a los mapas gráficos. La ortofotografía es un documento fotográfico que permite aprovechar el contenido informativo de la fotografía aérea y realizar las mismas medidas que en un plano gráfico.

Los principios en los que se basa el desarrollo de la ortofotografía, fueron enunciados por Lacmann en el año 1931 y más tarde por Ferber (1933), pero hasta la construcción del Orthophotoscope, en 1955 por Bean, se puede decir que no empezó el desarrollo y aplicaciones de esta técnica cartográfica.

En el caso ideal teórico de ser el eje de la toma rigurosamente vertical y el terreno llano y horizontal, la fotografía aérea coincidirá con la ortofotografía. Sí el terreno es llano y horizontal y el eje de la toma forma un pequeño ángulo con la vertical, se corrigen las deformaciones de la imagen original a través de la rectificación fotográfica convencional. En el caso general de disponer de una imagen correspondiente a una zona de terreno con relieve y tomada con el eje inclinado, para obtener una ortofotografía es preciso aplicar la técnica de la rectificación diferencial.

Esta técnica corrige las deformaciones de la imagen, causadas, tanto por los desniveles del terreno como por la falta de verticalidad del eje óptico de la cámara en el momento de la toma, transformando geométricamente zonas elementales de la fotografía aérea en ortofotografía.

Podemos definir ortoproyección como el método fotogramétrico de obtener fotomapas precisos, corregidos de las deformaciones producidas en la imagen fotográfica por el relieve y la inclinación de la fotografía, mediante la rectificación diferencial de la fotografía original.

10.2. Rectificación de imágenes digitales

La rectificación digital presenta importantes ventajas respecto a los procedimientos ópticomecánicos. La calidad de la imagen, al no estar en estos procedimientos supeditada a complejos dispositivos de enfoque que afecten a la nitidez fotográfica en el plano de reproducción, no constituyen ninguna restricción al sistema, tampoco imponen condicionantes importantes al sistema.

Se mantienen las restricciones en cuanto a desplazamiento debido al relieve, tanto según las características del terreno como de los objetos en el caso de fotogrametría no topográfica.

La rectificación diferencial de la fotografía consiste en enderezar y poner en escala, pequeñas unidades geométricas del terreno, que perfectamente ensambladas dan una imagen fotográfica del terreno.

Este nuevo documento fotográfico se denomina ortofotografía, y es tan preciso como un mapa.

Para que la transformación de la proyección central de la fotografía a la ortogonal del terreno, sea teóricamente exacta, sería necesario que las unidades geométricas a rectificar fuesen un punto. Esto en la práctica es imposible, utilizándose unidades geométricas de reducido tamaño *(pequeñas zonas de la imagen, que en el caso digital será el píxel)*.

Podemos diferenciar dos tipos de ortofotografías:

- Ortofotografía óptica: A partir de la diapositiva de la fotografía original se transmite la imagen ópticamente, en pequeñas unidades geométricas, al negativo final. El producto final es una imagen fotográfica.
- Ortofotografía digital: Se parte de imágenes generadas en forma digital o imágenes fotográficas que previamente se han escaneado. Estas imágenes están dividas en elementos rectangulares denominados pixeles. La corrección de los errores debidos al relieve y a la falta de verticalidad del eje de torna, hasta obtener una nueva imagen digital se realizan analíticamente. El resultado es una nueva imagen digital corregida, que puede ser reproducida fotográficamente.

En este tema nos centraremos en la ortofotografía digital por ser el método actualmente más extendido.

10.3. Métodos de rectificación de imágenes digitales

Podemos obtener imágenes digitales del terreno por medio de sensores aerotransportados, cámara digitales o bien transformando la imagen fotográfica en digital por medio de un escáner. Los sensores no forman la imagen según una proyección cónica, y además, para el caso de plataformas espaciales *(satélites)* dada la altura de vuelo los errores debidos al relieve son mínimos.

Los métodos más frecuentes de rectificación de imágenes digitales son:

- Rectificación polinómica.
- Rectificación proyectiva.
- Rectificación diferencial.

10.3.1. Rectificación polinómica.

La transformación entre la imagen original y la rectificada se realiza mediante el empleo de polinomios.

$$x = x'^{T} A y'$$
$$y = x'^{T} B y'$$

donde:

- $\overset{\circ}{=}$ x, y son las coordenadas de la imagen original.
- x', y' son las coordenadas de la imagen rectificada.

$$\mathbf{x'}^{\mathsf{T}} = (1, \mathbf{x'}, \mathbf{x'}^2, \mathbf{x'}^3, \dots); \mathbf{y'}^{\mathsf{T}} = (1, \mathbf{y'}, \mathbf{y'}^2, \mathbf{y'}^3, \dots)$$

A, *B* son las matrices de los coeficientes de los polinomios

A =	a ₀₀	a_{01}	a ₀₂]		[b ₀₀	\mathbf{b}_{01}	b ₀₂]
	a ₁₀	a ₁₁	a ₁₂		B –	b ₁₀	b ₁₁	b ₁₂	
	a ₂₀	a ₂₁	a 22		D –	b ₂₀	b ₂₁	b ₂₂	
		•••]		L		•••]

Este método corrige las distorsiones de la imagen a base a una red de puntos de control. El orden del polinomio utilizado depende del número de puntos de control disponible, siendo mayor la precisión al aumentar el número de éstos. Este método es completamente independiente de la geometría del sensor, por lo que puede ser empleado tanto para fotografías aéreas como para imágenes satélite. Debido a la transformación polinómica es posible el cambio de escala y la rotación de la imagen de la forma que mejor se ajuste a los puntos de referencia.

Aunque el método polinómico es muy sencillo de utilizar es necesario tener en cuenta que puede originar problemas y errores en la imagen transformada, debido a que no corrige adecuadamente los desplazamiento debido al relieve y además no considera las características específicos del sistema de captura de las imágenes. Es importante tener en cuenta, que el incremento del número de orden del polinomio reduce considerablemente los residuos del ajuste pero debido a ondulaciones en el terreno puede ocasionar que aparezcan grandes errores entre los puntos de control. No obstante, este método presenta la gran ventaja de que corrige en un solo proceso todas las distorsiones de la imagen (debido a la geometría del sensor, curvatura de la Tierra, etc.).

Este es un método muy empleado en la rectificación de imágenes satélite debido a que la geometría y distorsiones de las mismas a menudo son complejas de modelizar. Además en este tipo de imágenes, el desplazamiento debido al relieve es muy pequeño debido a las escasas diferencias de cota en relación con la que se toma la imagen y afecta poco a los resultados finales.

10.3.2. Transformación proyectiva

La transformación proyectiva plantea la relación existente entre dos planos (*Fig 1*). Esta relación es definida por 8 parámetros que pueden calcularse a partir de cuatro puntos de control y sus correspondientes coordenadas imagen. No es necesario el cálculo de los elementos de orientación interna y externa puesto que están incluidos implícitamente en los coeficientes de la transformación. Este método es de uso frecuente para rectificación de fotografías aéreas de zonas llanas o de imágenes de fachadas de edificios.



Figura 1. Transformación proyectiva.

La expresión de la transformación proyectiva puede ser modificada para la toma de una imagen desde un satélite. Los sensores instalados en los satélites, como por ejemplo el *SPOT*, realizan la captura mediante un barrido de líneas, por tanto, su geometría es de tipo perspectiva lineal, no existiendo un punto de vista sino una línea de vista. Cada línea de barrido tiene un centro de perspectiva diferente que se puede asumir que están en una línea recta (órbita). Si se considera el eje y en la dirección de vuelo y x representa el pixel en la línea de barrido, la expresión de la transformación perspectiva se modifica de la forma:

$$X = \frac{a_1 x' + b_1 y' + c_1}{a_3 x' + b_3 y' + 1}$$
$$Y = a_2 x' + b_2 y' + c_2$$

La utilización de este método en el tratamiento de imágenes satélites es compleja ya que debido a la curvatura terrestre, el definir la superficie terrestre como un plano lleva a producir errores en la imagen

rectificada, incluso para terrenos llanos. No obstante, este método es valido para la rectificación de imágenes de sensores aerotransportados.

10.3.3. Rectificación diferencial

Como sabemos la imagen digital se compone de una matriz de elementos rectangulares de pequeño tamaño, denominados pixel. De cada uno de estos pixel conocemos su tamaño, su posición en la imagen y el valor en la escala de grises asociado.

En imágenes digitales está claro que el elemento diferencial a rectificar es el pixel, puesto que es la unidad mínima de que se compone.

El proceso se realiza en modo diferido, obteniendo en primer lugar el modelo digital del terreno (datos altimétricos), procediéndose a continuación a realizar la rectificación diferencial.

Para la realización de un proceso de rectificación diferencial es necesario disponer de un modelo digital de elevaciones almacenado de la misma forma que la imagen, es decir, con estructura raster de una matriz de elevaciones. Este modelo debe estar referido a un sistema de proyección de coordenadas que será en el que se obtenga la imagen rectificada.

Para entender mejor el proceso imaginemos una imagen digital y su transformación al terreno, *(Fig. 2)*, suponiendo que cada pixel es plano se transforma en un trapecio. El conjunto de estas piezas en el terreno perfectamente ensambladas constituiría la ortofotografía. El elemento diferencial rectificado ha sido el pixel.



Figura 2. Transformación directa (fotografía → mapa)

El caso contrario (*Fig. 3*), una imagen digital que sea proyección ortogonal del terreno, por ejemplo un mapa escaneado. Si transformamos los píxeles del mapa a la proyección de la fotografía, obtendríamos una serie de trapecios que ensamblados componen la imagen fotográfica.



Figura 3. Transformación inversa (mapa ---> fotografía)

La relación entre ambas proyecciones, la ortogonal del terreno y la cónica de la fotografía viene dada por las ecuaciones de colinealidad. El objetivo de la rectificación de las imágenes digitales es asignar a cada uno de los elementos de la matriz del modelo digital el valor de gris correspondiente. Para la determinación del valor de gris se utilizan estas ecuaciones. Así las coordenadas terreno X, Y, Z de los puntos que integran el modelo digital son transformados en coordenadas imagen x, y mediante la utilización de las ecuaciones de colinearidad.

$$x = -c \frac{m_{11}(X - X_{o}) + m_{12}(Y - Y_{o}) + m_{13}(Z - Z_{o})}{m_{31}(X - X_{o}) + m_{32}(Y - Y_{o}) + m_{33}(Z - Z_{o})}$$
$$y = -c \frac{m_{21}(X - X_{o}) + m_{22}(Y - Y_{o}) + m_{23}(Z - Z_{o})}{m_{31}(X - X_{o}) + m_{32}(Y - Y_{o}) + m_{33}(Z - Z_{o})}$$

Estas ecuaciones expresan las coordenadas (x, y) en la imagen en función de las coordenadas (X, Y, Z) del terreno y los parámetros de orientación exterior $(X_0, Y_0, Z_0, \omega, \varphi, \kappa)$. Si realizamos la orientación interna y exterior de la fotografía y además conocemos la Z del punto terreno, podemos realizar las anteriores transformaciones:

- Proyección de la fotografía (x, y) a mapa (X, Y -terreno-).
- Proyección de mapa (X, Y -terreno-) a fotografía (x, y).

En la ortoproyección digital se utiliza la transformación inversa. A cada píxel de la imagen en la proyección del mapa, le vamos a asignar el valor de la escala de grises en la proyección cartográfica.

La posición de la imagen digital en el terreno la conocemos y por tanto las coordenadas de cada píxel, ya que previamente habremos definido una distribución de ortos con un determinado formato para cubrir la zona. A continuación habremos elegido una fotografía que cubra la orto a realizar.

Para realizar las transformación es necesario disponer de los siguientes parámetros:

- Orientación interna de la cámara: coordenadas del punto principal de la cámara, distancia principal, marcas fiduciales y distorsión de la lente.
- Orientación externa: posición de la cámara en el espacio; coordenadas de la posición del centro de proyección (X₀, Y₀, Z₀) y los tres giros de la cámara (ω, φ, κ).

- El tamaño del pixel de la imagen digital en unidades cámara (mm).
- El tamaño de la malla del modelo digital en unidades terreno (m).
- Las coordenadas de referencia del modelo digital en una determinada proyección cartográfica (normalmente las coordenadas del punto superior izquierda).

10.4. Esquema de la generación de ortoimágenes

Se parte de la premisa de disponer de los datos vistos en el apartado anterior (imagen digital, certificado de calibración, modelo digital, etc.).

En la figura 4 se muestran los pasos a seguir en la generación de una ortofotografía digital. Se parte de una imagen "vacía", formada por un conjunto de píxeles sin asignación de valor de tonalidad *(Nd)*, caracterizados por estar referidos al sistema de referencia terreno y por poseer un cierto tamaño físico, que constituye la resolución de la ortoimagen. Aplicando en sentido inverso (transformación inversa) las ecuaciones de colinealidad, se rellenará dicho valor de tonalidad.



Figura 4. Generación de una ortofotografía digital.

Supongamos que se parte de la posición de cualquier punto sobre el terreno (pixel) de coordenadas X, Y conocidas; por interpolación del modelo digital del terreno podremos obtener la coordenada Z de dicho punto. Con estas coordenadas, los parámetros de orientación externa y las ecuaciones de colinealidad podrá obtenerse analíticamente la posición del punto sobre la imagen (x, y), como si realmente se reconstruyera el rayo luminoso que lo impresionó. A partir de la orientación interna efectuada se identifica dicha posición en la imagen y su correspondiente tonalidad, bien en modo de

escala de grises, o bien en modo color (RGB); este valor se asignará a la posición (X, Y) de partida de la ortoimagen.

Está claro que en el proceso de rectificación que se lleva a cabo, las posiciones de los píxeles proyectados no coinciden con la posición de los píxeles originales, siendo necesario combinar de alguna forma la información espectral *(Nd)* de los píxeles vecinos para obtener el valor final deseado de la tonalidad, empleándose habitualmente las técnicas de remuestreo digital, asegurando así que todos los pixeles de la ortofotografía resultante, tengan su nivel de gris.

10.5. Técnicas de remuestreo

Como se ha visto anteriormente hay que determinar el nivel de gris que le corresponde a cada píxel, debido a que la posición proyectada no tiene porqué coincidir con la posición original del mismo ni con su valor entero. Al realizar la transformación espacial se tiene que los valores de las coordenadas de la imagen no coincidirán con los de la imagen original de forma que habrá puntos que no quedarán definido por sus niveles digitales (Fig. 5). Por tanto, es necesario interpolar el valor de gris conociéndose esta operación con el nombre de remuestreo *(resampling)*.



Figura 5. Remuestreo de imágenes.

Por medio de este método (remuestreo) hacemos varios muestreos sobre la imagen inicial. Cada vez que se efectúan cambios geométricos en la imagen digital, surgen varios errores de forma inevitable.

Los tres métodos de remuestreo más frecuentemente usados son:

- Vecino mas próximo
- Interpolación bilineal
- Convolución bicúbica

Método del vecino o píxel más cercano

Este método se llama así por situar en cada cuadrado de la malla de la ortofoto el valor de gris del píxel más cercano en la imagen original. Esta es la solución mas rápida y su principal inconveniente está en la distorsión que introduce en rasgos lineales de la imagen como carreteras, caminos,etc.

Siendo P el punto más cercano, entonces las coordenadas son:

$$x_P = Int (x + 0.5)$$

 $y_P = Int (y + 0.5)$

siendo Inte la expresión reducida de Integer, significa un número entero.



Figura 6. Remuestreo por medio del vecino más próximo.

Método deInterpolación bilineal

Este método supone promediar los niveles de gris de los cuatro píxeles más próximos de la imagen original. Este promedio se pondera según la distancia del píxel original al corregido; teniendo mayor influencia los píxeles más cercanos de la imagen original. Reduce el efecto de distorsión en los rasgos lineales, pero tiende a difuminar un tanto los contrastes espaciales de la imagen original.

Método de convolución bicúbica

Considera los niveles de gris de los 16 píxeles más próximos. El efecto visual es más correcto que los anteriores pero supone un volumen de cálculo mucho mayor.

De los tres métodos de remuestreo mencionados, el método del vecino más próximo es el más simple. Se distingue por su rápida ejecución en cuanto a cálculo se refiere, pero geométricamente hablando es el menos adecuado, con una precisión de ± 0.5 píxel. Los otros dos métodos restantes tienen una mayor precisión geométrica pero se requiere mayor trabajo en el cálculo. El método de convolución cúbica es el que absorbe mayor tiempo. En casos generales, el más utilizado es el método de interpolación bilineal. La elección del método más idóneo dependerá de la finalidad del proceso y de los recursos disponibles. El más preciso de todos es el método de la convolución que tiene un 0,3 % de error de interpolación. La interpolación bilineal tiene un valor de error del 3,7 % y el procedimiento del vecino más próximo del 15,7 %.

10.6. Calidad de la imagen ortofotográfica

Una vez obtenida la imagen ortorrectificada es fundamental la supervisión de la calidad de la misma, los efectos fundamentales que es necesario localizar son los siguientes:

- Comprobación de que la imagen esté completa. Si el área que cubre la imagen no está cubierta adecuadamente por un *MDE* se pueden producir errores en la ortoimagen final.
- Presencia de arrastres en la imagen. Las causas más frecuentes de aparición de arrastres (la imagen aparece movida) es la presencia de errores en el modelo digital de elevaciones (puntos anómalos) o bien la presencia de valores de desplazamiento debido al relieve muy elevados al encontrarnos en el borde de la imagen. Esta última causa es muy frecuente cuando se intenta la rectificación de una cumbre montañosa, en la que la cara orientada hacia la cámara aparece adecuadamente rectificada pero en la cara contraria existen arrastres debido a que una pequeña porción de la imagen original debe "estirarse" para cubrir el área correspondiente en la ortoimagen.
- Aparición de dobles imágenes. Este problema era especialmente importante en los primeros sistemas fotogramétricos digitales que trabajaban a nivel de modelo en el que errores debidos a la

orientación de las imágenes (los parámetros de la orientación externa de la imagen derecha del primer modelo presenta ligeras diferencias con respecto a los calculados con la misma imagen cuando hace de imagen izquierda del segundo modelo) o bien falta de continuidad en el modelo digital de elevaciones.

- Aparición de porciones de ortoimagen no cubiertas. Este hecho tiene el mismo origen que la aparición de dobles imágenes pero con el resultado contrario, no existe continuidad en la ortoimagen final por un problema de orientación o del *MDE* empleado en la ortorrectificación.
- Errores planimétricos. Se comprueban mediante la medida directa de puntos sobre el terreno que sean perfectamente distinguibles en la imagen, comparando posteriormente sus coordenadas planimétricas. Los principales problemas que afectan a la calidad de las ortoimágenes generadas mediante rectificación diferencial son los debidos a los errores o falta de precisión del modelo digital de elevaciones, dejando a un lado los problemas de ajuste radiométrico que se compensan mediante correcciones.

10.7. Correcciones radiométricas

Una de las criticas que se hacía a los productos derivados de la ortofotografía analógica era su falta de homogeneidad (diferencias de contrastes y de tonalidades entre las ortofotos que formaban mosaicos). En los sistemas digitales, el procesamiento radiométrico mejora la calidad de las imágenes por procedimientos simples y controlables. La corrección radiométrica de las imágenes tiene dos objetivos:

- •Eliminar las discontinuidades de color entre ortofotos contiguas.
- Crear una representación homogénea de color y tonalidad en un área geográfica grande para la producción de mosaicos.

En las fotografías aéreas convencionales existen cinco parámetros físicos que contribuyen a estas variaciones de color y tonalidad:

- La posición del punto de vista.
- La dirección de la iluminación de la escena.
- La distancia focal.
- Las condiciones atmosféricas.
 - •La reflectancia de los distintos tipos de superficies topográficas.

La presencia de estos parámetros hacen que las correcciones radiométricas sean físicamente imposibles.

Durante la conversión de la imagen de formato analógico a digital, los datos de entrada del escáner tienen una gran influencia sobre la calidad de esta y los sistemas mas sofisticados ofrecen un amplio espectro de corrección selectiva de colores, así como tablas de referencia de color (LUT), por medio de las cuales se evita la pérdida de información.

El algoritmo de corrección radiométrica se aplica en técnicas de procesamiento de imágenes de bajo nivel (que no tienen relación con problemas de interpretación), tales como ajuste o realce de contrastes, transformaciones con las tablas de referencia de color, manipulación de histogramas etc.

La calibración se basa en la hipótesis de Helmhontz sobre la constancia del color (en el espectro visible e infrarrojo) y permite eliminar las diferencias entre las condiciones de iluminación de las imágenes. En radiometría (al igual que en el problema de la localización de píxeles) se necesitan también referencias, uno de los mejores parámetros de calibración es el histograma. Por ejemplo, para eliminar las diferencia entre los valores de gris de ortofotos contiguas, se parte M hecho que los

histogramas, en estas zonas de solape de imágenes adyacentes han de ser iguales, lo que implica que se ha de llevar a cabo un ajuste radiométrico total de ambas imágenes. Las incógnitas serán las tablas de corrección de los valores de gris de cada imagen

El proceso de corrección radiométrica de datos emplea una gran cantidad de tiempo de ordenador pero mejora considerablemente la calidad de la imagen; solo después de esta calibración se obtiene la ortofoto con la cobertura homogénea necesaria para la formación de mosaicos.

10.8. Confección de mosaicos

Cada ortofoto se produce con un cierto grado de recubrimiento con respecto a sus vecinas. Durante el paso anterior se han eliminado las diferencias en el balance de color pero pueden aparecer otras perturbaciones como son:

- Diferencias en la orientación de las sombras (en edificios, bosques, etc..).
- Pequeñas discontinuidades geométricas como las que se presentan en puentes y edificios, relacionadas con efectos de paralaje. Recordemos que los modelos digitales de terreno definen la superficie topográfica y no tienen en cuenta las altitudes de puentes y edificios.
- Diferencias fenomenológicas en fotografías tomadas en las diferentes estaciones del año.
- Diferencias de reflectancia en zonas de agua (embalses, ríos, lagos). arenosas o de nieve.

En esta fase del proceso de imágenes solo se tienen en cuenta las zonas de recubrimiento entre las dos ortofotos consideradas, El área común se centra con respecto a unos límites reales comunes y a continuación comienza un proceso interactivo mediante el cuál se define una trayectoria de corte en la zona común de tal modo que solo se va a guardar en la base de datos la parte correspondiente a cada una de las dos ortofotos. Esto tiene las ventajas de:

- Minimizar los efectos visuales de la paralaje.
- Minimizar los efectos visuales de las sombras.
- Realizar una representación homogénea en los casos de diferencias fenomenológicas.

10.9. Estereo-ortofotogrametría digital

La ausencia de la tercera dimensión en las ortofotos puede suplirse con ayuda de las *esteroortofotos*, necesitamos otra imagen que haga de par estereoscópico.

El principio básico puede observarse en la figura 7. Suponemos que tenemos un modelo tridimensional del terreno que nos sirven para generar la ortofoto y su par estereoscópico. Para la ortofoto, que es una proyección ortogonal de la superficie terrestre, los puntos de la malla se transforman mediante la transformación tridimensional de semejanza en puntos en la imagen creando una malla deformada de cuadriláteros en el sistema x, y de la imagen.

El mismo modelo tridimensional del terreno se somete a una proyección paralela inclinada y los vértices de la malla deformada en la imagen se determinan de la forma siguiente:

- Se genera una malla cuadrada en el plano XY con un tamaño de cuadrado igual que el del modelo digital del terreno.
- Generamos un modelo digital con una dirección inclinada con respecto al eje Z pero paralela al plano XZ.
- Transference de la proyección de estas coordenadas XYZ en la imagen original.



Figura 7. Relaciones entre imagen original, modelo digital, ortofoto y modelo estéreo acoplado. (Kraus, K. Photogrammetry).

Finalmente, se les asigna el valor digital a todos los vértices de la malla deformada en la imagen con una transformación bilineal.

Una condición necesaria para estos cálculos es el conocimiento de la orientación externa de la foto. Al ser una proyección con un eje inclinado pero paralelo al plano XZ tendremos las mismas imágenes a lo largo de la dirección Y, es decir, no tendremos paralajes. En el eje X existirán paralajes relacionadas con las alturas Z del terreno, figura 8.



Figura 8. Paralajes X función de las alturas terreno. (Kraus, K. Photogrammetry).

Estas dos condiciones, la falta de paralaje en Y y la existencia de paralajes en X son las condiciones necesarias para una observación estereoscópica, por lo tanto, tenemos un par estereoscópico de una ortofoto.

Si las *estereo-ortofotos* están producidas desde una pasada fotogramétrica con un recubrimiento de un 60% aproximadamente, entonces la ortofoto se realiza saltando un fotograma y el par estereoscópico se suele formar con el 50% de la derecha y de la izquierda de una ortofoto; con la foto de la derecha y con la foto de la izquierda respectivamente, que no han sido tomadas para la ortofoto.

La ventaja de producir una ortofoto y su par con la foto vecina, a parte de poder observar el modelo estereoscópicamente, es que los detalles tales como tejados, árboles, etc., que no están incluidos en el modelo digital del terreno, se pueden observar estereoscópicamente.

Las *estereo-ortofotos* se pueden medir en instrumentos analógicos *(óptico-mecánicos)*, analíticos o digitales para determinar desniveles entre puntos.

10.10. Propiedades de las ortofotos digitales

- Las ortofotos digitales están geocodificadas y ofrecen al menos la misma precisión que los mapas de línea. Cada píxel tiene una posición claramente determinada en el sistema de referencia empleado (UTM, Lambert, etc.)
- Están calibradas respecto a los colores y por medio de los módulos de ajuste radiométricos y de formación de mosaicos se pueden fundir dos o mas ortofotos y producir una imagen de color homogénea de mejor calidad que la fotografía aérea original.
- Las ortofotos digitales son multitemporales. Los vuelos fotográficos con frecuencia se interrumpen por causas atmosféricas durante largos periodos, al cabo de los cuales pueden haber cambiado las condiciones de iluminación y los aspectos de los cultivos. Con esta tecnología pueden obtener documentos homogéneos sin las discontinuidades de color resultantes en los métodos clásicos. Gracias a esta cualidad, las ortofotos digitales pueden utilizarse para poner al día de una forma rápida los mapas existentes.
- Las ortofotos digitales pueden adoptar escalas variables, así como es posible fundir dos ortofotos digitales, también es posible.
- Las ortofotos digitales pueden adoptar escalas variables; a partir de una escala de consistencia se pueden formar ortofotos a distintas escalas (menores)
- Las ortofotos digitales son multiespectrales. Al ser imágenes de tipo raster se pueden aplicar técnicas de clasificación a las fotos ya sean en color o en infrarrojo color. Las propiedades de multitemporal, multiescala y multiespectral son exclusivas de las ortofotos digitales, y no existen en los documentos analógicos.
- Debido a sus propiedades multiespectrales y multiescalares pueden compararse con datos provenientes de teledetección con objeto de completar el proceso de interpretación con otros canales multiespectrales.
- Permiten la sobreimpresión de mapas de línea o temáticos para la formación de documentos más claros y precisos.
- Es obvio decir que se pueden utilizar para hacer cálculos de superficies, distancias, desplazamientos...etc.
- Se pueden adaptar a la superficie de un DTM para formar perspectivas, a menudo utilizadas en estudios de impactos ambientales.
- Debido a su carácter multidisciplinario, constituyen una fuente de datos muy útil para usuarios de GIS; por esta razón las ortofotos constituyen un complemento esencial de cualquier tipo de aplicación GIS al ofrecer información temática específica en formato vectorial y raster.

Bibliografía

- Chueca P., M., Topografía, Dossat, Madrid (1982), Tomo II, 84-237-0591-9.
- Curso sobre técnicas fotogramétricas y sus aplicaciones, CEDEX (MOPTMA), Madrid (1994).
- Delgado, J., Apuntes de Fotogrametría Digital, Universidad Politécnica de Jaén, 1997.
- Gómez, A., Apuntes de Fotogrametría, Universidad Politécnica de Madrid, ETSIA.

- Gómez, A., Flujo de trabajo en Fotogrametría Digital, Mapping, nº 53, Abril de 1999.
- Heras, A.E., Apuntes de Fotogrametría, Universidad Politécnica de Madrid, EUITT.
- Krauss, K., Photogrammetry, Dümmler/Bonn (1993), 3-427-78684-6.
- Moffitt, F.H. y Mikhail, E.M., Photogrammetry, Harper & Row Publishers., New York (1980), 3^a edición.
- Sanchez Espeso, J.M., Análisis del proceso de rectficación de una imagen aérea de eje vertical para obtener una imagen digital, Mapping, nº 64, septiembre de 2000.
- Wolf, P.R.; Dewitt, B. A, Elements of Photogrammetry with Applications in GIS, McGraw-Hill, EEUU, Tercera Edición (2000). 0-07-292454-3.
- Zhizhuo, W., Principles of Photogrammetry, (1990), 7-81030-00-8.

TEMA 11

LA FOTOGRAMETRÍA POR SATÉLITE

11.1. Introducción
11.2. Clasificación
11.3. Distorsiones geométricas de la imagen
11.4. Diferencias entre las ecuaciones de aerotriangulación aérea y espacial
11.5. Ecuaciones de la transformación proyectiva
11.6. Modelos digitales desde imágenes SPOT
11.7. Rectificación de imágenes satélites
11.8. Modelos matemáticos para la rectificación de la imagen
Bibliografía

10.1. Introducción

En aerofotogrametría convencional las cámaras aéreas convencionales se usan frecuentemente para obtener información del terreno a partir de las películas, mientras que en la fotogrametría aérea por satélite, además de estas cámaras se emplean otro tipo de sensores para la adquisición de información expresada en forma digital.

Las fotografías con cámaras convencionales producen unas imágenes con unas relaciones de geometría estable en todo el conjunto. Esto se debe a que la cámara es un sensor plano con la capacidad de generar imágenes en dos dimensiones las cuales están dentro de la categoría llamada fotografías estacionarias. Las relaciones de su geometría se ha debatido con mucho de talle.

Otros tipos de sistemas de sensores, por otro lado, pueden obtener un punto o una línea en un instante concreto. Este tipo de fotografías pertenecen a la fotografía dinámica. Por ejemplo el método de formación linear "*pushbroom*" de una cámara CCD generan imágenes escaneadas en la dirección de vuelo por medio de sensores a lo largo del vuelo sobre la plataforma. En el caso de fotografías panorámicas o sensores de escáner multiespectrales, sus escaneos laterales de la imagen se producen por los movimientos del obturador o giros de los espejos del escáner. A menudo es necesario reducir estas imágenes generadas por distintos tipos de sensores a una geometría básica antes de su posible uso, particularmente para investigar su correlación en análisis multiespectrales de un mismo área o en la comparación de imágenes multiespectrales(es decir, imágenes tomadas en tiempos diferentes). Esta es la razón de que se requiera el procesado de imágenes. Aún más importante es el hecho de que en los casos en los que queremos usarlos para actualizar mapas ya existentes o recopilar mapas temáticos.

11.2. Clasificación

La clasificación de las imágenes procedentes de los satélites puede realizarse a tendiendo a dos categorías básicas, de acuerdo con la aplicación requerida para cada misión (estas ya se han visto en Fotogrametría II, Tema 11). Estas categorías son:

- Teledetección.
- Fotogrametría por satélite.

La teledetección caracterizan por el hecho de dar la mayor importancia a la naturaleza del objeto del cual se toma la imagen, y la geometría es de menor importancia. La fotogrametría por satélite se caracteriza por lo opuesto: la geometría es el mayor y único interés y la naturaleza del objeto es de un interés mínimo. La fotogrametría por satélite puede ser dividida en dos subcategorías:

- Planimétrica (bidimensional) en la cual sólo la geometría horizontal del objeto es estudiada.
- Topográfica *(tridimensional)* en la cual se estudian las tres dimensiones.

11.3. Distorsiones geométricas de la imagen

Puesto que el proceso de adquisición de información por medio de teledetección está afectado por distintos errores, hay en consecuencia, varios tipos de distorsión geométrica en la formación de imágenes. Alguno de ellos, tales como el error de proyección debido a las ondulaciones del terreno, la distorsión debida a la curvatura terrestre y refracción atmosférica, se pueden corregir anticipadamente cuando es necesario haciendo una estimación de sus valores. Esto se hace normalmente introduciendo las fórmulas convencionales en fotogrametría tomando en cuenta al mismo tiempo las características de adquisición de imágenes.

Las variaciones de altura de la superficie de la tierra causará desplazamientos en los puntos de la imagen. Puesto que las alturas de vuelo en el espacio en teledetección son muy grandes, el efecto de las ondulaciones del terreno no tienen mucha repercusión en la formación de la imagen. Sin embargo, cuando hay grandes ondulaciones del terreno o se requiere una precisión muy alta se debe tener en consideración.

Usando las ecuaciones de colinealidad

$$x = -c \frac{m_{11}(X - X_o) + m_{12}(Y - Y_o) + m_{13}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)} = -c \frac{r}{q}$$

$$y = -c \frac{m_{21}(X - X_o) + m_{22}(Y - Y_o) + m_{23}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)} = -c \frac{s}{q}$$

Podremos encontrar los efectos dx y dy de las ondulaciones del terreno h = dZ sobre las coordenadas de la imagen x, y, de la forma siguiente:

$$dx = -c \frac{q dr - r dq}{q^2} = -c \frac{q c_1 h - s c_3 h}{q^2}$$
$$dy = -c \frac{q ds - s dq}{q^2} = -c \frac{q c_2 h - s c_3 h}{q^2}$$

• En el caso de fotografías verticales.

En este caso, aproximadamente $\varphi = \omega = \chi = 0$, luego la matriz de rotación de las ecuaciones de colinealidad es la matriz unidad, y las ecuaciones anteriores se pueden escribir de la forma:

$$dx = -c \frac{(X - X_o)h}{(Z - Z_o)^2} = -\frac{x}{Z - Z_o}h$$
$$dy = -c \frac{(Y - Y_o)h}{(Z - Z_o)^2} = -\frac{y}{Z - Z_o}h$$

• En el caso de fotografía oblicua.

Cuando un sensor tiene fijada una inclinación lateral o transversal Ω_0 (ϕ , ω , χ son 0), entonces la matriz de rotación es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Omega_0 & -\sin\Omega_0 \\ 0 & \sin\Omega_0 & \cos\Omega_0 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones para *dx* y *dy* quedarán de la forma:

$$dx = -c \frac{-(X - X_o) \cos \Omega_0 h}{[(Y - Y_o) \sin \Omega_0 + (Z - Z_o) \cos \Omega_0]^2}$$

$$dy = -c \frac{-[(Y - Y_{\circ}) \cos \Omega_{0} - (Z - Z_{\circ}) \sin \Omega_{0}] \cos \Omega_{0} h}{[(Y - Y_{\circ}) \sin \Omega_{0} + (Z - Z_{\circ}) \cos \Omega_{0}]^{2}}$$

Sustituyendo la matriz de rotación anterior se obtendrán las ecuaciones

$$x = -c \frac{(X - X_{o})}{H'}$$
$$dy = -c \frac{(Y - Y_{o}) \cos \Omega_{0} - (Z - Z_{o}) \operatorname{sen} \Omega_{0}}{H'}$$

donde $H' = (Y - Y_o) sen \Omega_0 + (Z - Z_o) cos \Omega_0$

Las ecuaciones quedarán por tanto reducidas a las expresiones:

$$dx = -\frac{x \cos \Omega_0}{H'}h$$
$$dy = -\frac{y \cos \Omega_0}{H'}h$$

FOTOGRAMETRÍA III

Respecto a las imágenes del *SPOT*, este efecto solamente afecta a la dirección de la línea de barrido (escaneado), es decir, en la ecuación anterior x = 0, es decir, dx = 0.

Cuando un sensor tiene fijada una inclinación longitudinal Φ_0 (ω , φ , χ , son 0) entonces tendremos como matriz de rotación:

$$\begin{bmatrix} \cos \Phi_0 & 0 & -\sin \Phi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Phi_0 & 0 & \cos \Phi_0 \end{bmatrix}$$

De forma similar a la derivación de las ecuaciones anteriores, podemos obtener las ecuaciones correspondientes para el efecto de las ondulaciones del terreno de la forma siguiente:

$$dx = -\frac{x \cos \Phi_0}{H''}h$$
$$dy = -\frac{y \cos \Phi_0}{H''}h$$

donde $H'' = (Z - Z_o) \operatorname{sen} \Phi_0 + (Z - Z_o) \cos \Phi_0$

11.4. Diferencias entre las ecuaciones de aerotriangulación aérea y espacial

Para ciertas aplicaciones, que requieren poca precisión, la aerotriangulación a partir de imágenes desde satélites puede ser rentable. Por ejemplo, para mapas topográficos de pequeña escala de regiones montañosas, se pueden usar imágenes pancromáticas del satélite *SPOT*. Este satélite usa un sensor de formación lineal. Los pares estereoscópicos de las imágenes del *SPOT* pueden ser adquiridas para una región usando el eje de colimación del satélite. Los análisis fotogramétricos de las imágenes resultantes pueden ser formadas mediante el uso de ecuaciones de colineación modificadas.

Las ecuaciones que relacionan la posición de un punto en el terreno con su homologo en una imagen obtenida con una cámara convencional vienen dadas por las correspondientes ecuaciones de colinealidad:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ -\mathbf{c} \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{R}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X} - \mathbf{X}_{o} \\ \mathbf{Y} - \mathbf{Y}_{o} \\ \mathbf{Z} - \mathbf{Z}_{o} \end{bmatrix}$$

$$x = -c \frac{m_{11}(X - X_{o}) + m_{12}(Y - Y_{o}) + m_{13}(Z - Z_{o})}{m_{31}(X - X_{o}) + m_{32}(Y - Y_{o}) + m_{33}(Z - Z_{o})}$$
$$y = -c \frac{m_{21}(X - X_{o}) + m_{22}(Y - Y_{o}) + m_{23}(Z - Z_{o})}{m_{31}(X - X_{o}) + m_{32}(Y - Y_{o}) + m_{33}(Z - Z_{o})}$$

Los sensores lineales capturan las imágenes según una línea de proyección, así como las cámaras tienen centro de proyección. Un sensor lineal está compuesto por una fila de elementos CCD perpendiculares a la dirección de la órbita del satélite. Cada línea de barrido del sensor tiene sus propios parámetros de orientación externa, así como su centro de proyección en el centro de la línea (*Fig. 1*).

En la figura 1 puede observarse que el punto de partida es la proyección del centro de la fila 1 en el terreno. En este punto el sensor del satélite tiene un grupo particular de parámetros de orientación externa ω_0 , φ_0 , κ_0 , X_{L0} , Y_{L0} y Z_{L0} . Estos parámetros pueden ser considerados para variar la función de la coordenada x. Varias relaciones funcionales se han aplicado para tratar estas variaciones sistemáticas, y se han obtenido los siguientes resultados satisfactoriamente:

$$\omega_{x} = \omega_{0} + a_{1}x$$

$$\phi_{x} = \phi_{0} + a_{2}x$$

$$\kappa_{x} = \kappa_{0} + a_{3}x$$

$$X_{Lx} = X_{L0} + a_{4}x$$

$$Y_{Lx} = Y_{L0} + a_{5}x$$

$$Z_{Lx} = Z_{L0} + a_{6}x + a_{7}x$$

2



Figura 1. Imagen obtenida con un sensor lineal.

En estas ecuaciones, x es el número de fila de las distintas posiciones de la imagen; ω_x , φ_x , κ_x , X_{L0} , Y_{L0} y Z_{L0} son los parámetros de orientación externa del sensor para cada valor de x; ω_0 , φ_0 , κ_0 , X_{L0} , Y_{L0} y Z_{L0} son los parámetros de orientación externa del sensor en la posición inicial; y $a_L a_2$,...., a_7 son los coeficientes que describen las variaciones sistemáticas de los parámetros de orientación externa cuando las imágenes son escaneadas. Hay que tener en cuenta que la variación en Z_L es de segundo orden aunque las otras variaciones son lineales (de primer orden). Esto es debido a la trayectoria orbital del satélite y está basado en el supuesto de que usemos un sistema de coordenadas verticales locales. Dependiendo de la precisión que necesitemos y de la que tengamos en las mediciones, el coeficiente del término de segundo orden a_7 normalmente se considera como 0.

Dada la variación del los parámetros de la orientación externa descrita anteriormente, las ecuaciones de colineación para un punto a son:

$$0 = -c \frac{m_{11x}(X - X_{Lx}) + m_{12x}(Y - Y_{Lx}) + m_{13x}(Z - Z_{Lx})}{m_{31x}(X - X_{Lx}) + m_{32x}(Y - Y_{Lx}) + m_{33x}(Z - Z_{Lx})}$$

$$y = -c \frac{m_{21x} (X - X_{Lx}) + m_{22x} (Y - Y_{Lx}) + m_{23x} (Z - Z_{Lx})}{m_{31x} (X - X_{Lx}) + m_{32x} (Y - Y_{Lx}) + m_{33x} (Z - Z_{Lx})}$$

En estas ecuaciones y es la coordenada y (número de columna) del punto A; y_0 es la coordenada y del punto principal de la fila que contiene la imagen; c es la distancia focal del sensor; m_{11x} , m_{12x} ,.... m_{33x} son los términos de la matriz de rotación para la posición del sensor cuando la fila x se escanéa; X_4 , Y_4 y Z_4 son las coordenadas del sistema del espacio objeto del punto A. Hay que tener en cuenta que los términos de la orientación externa y por tanto los términos de la matriz de rotación depende de la forma de las ecuaciones anteriores. Hay que observar también que las unidades de las coordenadas de la imagen y la longitud focal deben ser las mismas.

El uso de esto en aerotriangulación es más complicado que el uso con cámaras, siendo las dificultades grandes debido a la correlación entre los parámetros de orientación externa, así como de otros factores.

11.5. Ecuaciones de la transformación proyectiva

Hemos vistos que un sensor lineal están compuestos por una fila de elementos CCD perpendiculares a la dirección de la órbita (o vuelo), de manera que estos capturan las imágenes según una línea de proyección, así como las cámaras tienen centro de proyección (*Fig. 2*).



Figura 2. Dirección de la órbita (o vuelo) de un sensor lineal.

Puesto que las relaciones geométricas para la imagen es, en este caso, las mismas que para la fotografía convencional, las relaciones matemáticas perspectivas vienen dadas por las ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 0\\ y\\ -c \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} R^{-1} \begin{bmatrix} X - X_{o}\\ Y - Y_{o}\\ Z - Z_{o} \end{bmatrix}$$

Despejando llegamos a:

$$0 = -c \frac{m_{11}(X - X_o) + m_{12}(Y - Y_o) + m_{13}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

$$y = -c \frac{m_{21}(X - X_o) + m_{22}(Y - Y_o) + m_{23}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

las ecuaciones para el cálculo inverso vienen dadas por

$$\frac{X - X_{o}}{Z - Z_{0}} = \frac{m_{21}y - m_{31}c}{m_{23}y - m_{33}c}$$
$$\frac{Y - Y_{o}}{Z - Z_{0}} = \frac{m_{22}y - m_{32}c}{m_{23}y - m_{33}c}$$

donde los elementos X_o , Y_o , Z_o , ω , φ , κ están todos referidos al instante de tiempo t_{j_i} ; estos valores están calculados a partir de un punto de coordenadas imagen x_i obtenido sobre la base del tiempo t_0 . Su relación teórica es:

$$\mathbf{x}_{i} = (\mathbf{t}_{i} - \mathbf{t}_{0}) \mathbf{v}$$

Cuando el sensor lineal captura la imagen inclinándose lateralmente a ambos lados del ángulo Ω_0 (*Fig. 3*) para obtener las imágenes de otra franja (*SPOT*), las ecuaciones variarán en el lado izquierdo obteniendo las expresiones:



Figura 3. Dirección de la órbita del satélite con inclinación transversal.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Omega_0 & -\sin\Omega_0 \\ 0 & \sin\Omega_0 & \cos\Omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y\cos\Omega_0 + c\sin\Omega_0 \\ c\cos\Omega_0 - y\sin\Omega_0 \end{bmatrix}$$

$$0 = -c \frac{m_{11x} (X - X_{Lx}) + m_{12x} (Y - Y_{Lx}) + m_{13x} (Z - Z_{Lx})}{m_{31x} (X - X_{Lx}) + m_{32x} (Y - Y_{Lx}) + m_{33x} (Z - Z_{Lx})}$$

$$\frac{y\cos\Omega_{0} + c \sin\Omega_{0}}{c\cos\Omega_{0} - y \sin\Omega_{0}} = -c\frac{m_{21x}(X - X_{Lx}) + m_{22x}(Y - Y_{Lx}) + m_{23x}(Z - Z_{Lx})}{m_{31x}(X - X_{Lx}) + m_{32x}(Y - Y_{Lx}) + m_{33x}(Z - Z_{Lx})}$$

En el caso de ser la inclinación del sensor adelante o detrás un ángulo Φ_0 en la dirección de vuelo, como puede observarse en la figura 4, entonces las ecuaciones correspondientes se obtienen a partir de la expresión:



Figura 4. Dirección de la toma con inclinación longitudinal.

$$\begin{bmatrix} \cos \Phi_0 & 0 & -\sin \Phi_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Phi_0 & 0 & \cos \Phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \sin \Phi_0 \\ y \\ -c \cos \Phi_0 \end{bmatrix}$$

$$c tag\Phi_{0} = -c \frac{m_{11x}(X - X_{Lx}) + m_{12x}(Y - Y_{Lx}) + m_{13x}(Z - Z_{Lx})}{m_{31x}(X - X_{Lx}) + m_{32x}(Y - Y_{Lx}) + m_{33x}(Z - Z_{Lx})}$$
$$\frac{y}{cos\Phi_{0}} = -c \frac{m_{21x}(X - X_{Lx}) + m_{22x}(Y - Y_{Lx}) + m_{23x}(Z - Z_{Lx})}{m_{31x}(X - X_{Lx}) + m_{32x}(Y - Y_{Lx}) + m_{33x}(Z - Z_{Lx})}$$

11.6. Modelos digitales desde imágenes SPOT

Los datos *SPOT*, son una fuente válida de información del terreno, especialmente para áreas del mundo que no disponen de mapas a grandes escalas. Actualmente existen algoritmos para producir *MDE*, y evaluar las precisiones de los mismos. La investigación no sólo evalúa la precisión en el *MDE*, sino también en todos sus modelos derivados.

Generalmente los mapas o *MDE* procedentes de imágenes de satélites se obtienen por medios automatizados. Por otro lado los datos son fácilmente incorporados a un SIG. Se han creado y desarrollado distintos software comerciales productores de *MDE*, algoritmos para crear *MDEs* a partir

de imágenes *SPOT*. El proceso se inicia partiendo de imágenes tomadas desde una órbita precisa de forma que las únicas diferencias en el terreno son debida al paralaje. A partir de unas correlaciones, las cuales se procesan en varios pasos, el paralaje del terreno es convertido en medida de elevación. Son suficientes ocho puntos de control para crear un *MDE*.

Los factores que más afectan a la precisión de la elevación son los ratios base-altura de las imágenes estereoscópicas originales, la calidad de las imágenes, el la disponibilidad de puntos de control y los algoritmos diseñados. Altos ratios base-altura y más puntos de control dan más precisión a las elevaciones. Estos *MDE* usan como fuente para mapas a escalas 1:24.000 o 1:50.000. Otro factor que determina la precisión geométrica es el ajuste en la triangulación. Se puede conseguir suficiente precisión geométrica con un limitado número de puntos de control pero cuidadosamente elegidos. Los puntos conjugados se pueden medir con un error medio cuadrático de 0.5 pixeles para la filas y columnas respectivamente. La geometría de los rayos imágenes que intersectan un par estereoscópico son de 21° E / 21° W.

No existe un consenso sobre las precisiones de un *MDEs* obtenidas desde imágenes pancromáticas de SPOT, algunas de las publicaciones consultadas son muestran los siguientes resultados:

El error medio cuadrático para elevaciones era de 19.3 m. y de 13.7 m. para zonas de bajo relieve (Por ejemplo aproximadamente 250 m. en un área de 25 km²), los *MDE* derivados de *SPOT* dan suficiente precisión en cotas, gradiente de la pendiente y orientaciones según orientación.

Los errores estimados de los *MDEs* desde imágenes *SPOT* en el terreno son respectivamente de 4 m, 4 m y 8 m para los ejes *X*, *Y* y *Z* respectivamente.

Las diferencias existentes de los resultados de los *MDEs* generados desde datos *SPOT en* comparación n con las fotos aéreas se deben principalmente a la diferente naturaleza de los datos, diferentes relaciones perspectivas y de distintas geometría en la intersección de rayos. Las particularidades más destacadas son que cada fila es una proyección central (en lugar de cada imagen), que el ángulo de abertura es muy pequeño (4° en lugar de 60° a 120 °) y la imagen es digital y no analógica.

La precisión del procedimiento de generación de *MDE* desde imágenes *SPOT* es alta dado el hecho de que las ecuaciones de colinearidad en la que se basan los algoritmos permiten obtener una relación entre las coordenadas imagen y las coordenadas objeto. De esta forma se obtienen la orientación relativa y las coordenadas modelo y los parámetros de calibración pueden ser incluidos en el ajuste de errores sistemáticos. El ajuste del bloque es eficiente porque es simultáneo al tratamiento de un gran numero de grandes imágenes y, reduce el número de puntos de control necesarios en terreno.

11.7. Rectificación de Imágenes Satélite

Si se dan los parámetros de orientación, los cuales varían normalmente con el tiempo, y disponemos también del *MDT* se pueden procesar diferentes imágenes en teledetección por sus correspondientes ecuaciones de transformación proyectiva. Sin embargo, el método práctico para procesados automáticos de imágenes en teledetección es el cálculo basado en el modelo matemático usando los puntos de control. Este modelo se ejecuta principalmente en forma digital y se llama *rectificación diferencial digital*.

Antes de la rectificación diferencial digital, es necesario hacer unas transformaciones a la imagen dependiendo de la situación, tales como las correcciones de los errores debidos a la falta de homogeneidad de la velocidad rotacional de los espejos del escáner, correcciones por curvatura terrestre y refracción atmosférica, errores debido a la ondulación del terreno y la corrección del error de distorsión por la rotación de la tierra, etc.

FOTOGRAMETRÍA III

En la rectificación geométrica de la rectificación digital de la imagen se debe determinar en primer lugar todas las relaciones geométricas entre la imagen original y la imagen después de ser rectificada. Asumiendo que las coordenadas de un píxel arbitrario p antes y después de la rectificación de la imagen son respectivamente (x_p, y_p) y (X_p, Y_p), entonces tenemos dos expresiones digitales recíprocas:

$$X_p = F_x(x_p, y_p), Y_P = F_Y(x_p, y_p)$$

 $x_p = f_x(X_p, X_p), y_P = F_Y(X_p, Y_p)$

Estas ecuaciones promueven las ecuaciones de transformación, usadas en el llamado método directo, mientras que más tarde se vera el método inverso, también llamado método indirecto.

Puesto que el efecto de las ondulaciones del terreno es muy pequeño en la teledetección espacial, las funciones de la transformación F_x , F_y , f_x , f_y , son básicamente transformaciones entre dos planos. La función más simple que se usa es una polinómica. Sin embargo, en teledetección espacial, o cuando se requiere una precisión alta en la rectificación de la imagen, el efecto de las ondulaciones del terreno no se debe para por alto. Por consiguiente, además de conocer los elementos de orientación de la fotografía, también es necesario el conocimiento de las alturas de los puntos de control (con el *MDE*) para la rectificación diferencial digital de la imagen, de esta forma podemos utilizar las correspondientes ecuaciones de la transformación proyectiva (normalmente ecuaciones de colineación) para determinar la transformación entre las coordenadas de los puntos en la imagen (x_p , y_p) de la imagen original, y las coordenadas X_p , Y_p de la imagen rectificada así como las alturas Z_P de los puntos. Puesto que el trabajo de cálculo en este método es muy largo, normalmente se hace la rectificación diferencial digital de un área dividiéndola en subáreas. Para los cuatro puntos de las esquinas (también llamados puntos de amarre o control) de un subárea, se utilizará un método más riguroso, como es el método de ecuaciones de transformación proyectiva, mientras que para un alto número de puntos dentro de un subárea utilizamos una transformación polinómica simple.

Método directo de rectificación digital

En este apartado se van a tratar los método directo e inverso de rectificación digital ya vistos en el Tema 9, desde el punto de vista de imágenes procedentes de satélites.

En la figura 5 se ilustra el proceso de transformación por el método directo usando las ecuaciones

$$X_p = F_x(x_p, y_p), Y_P = F_Y(x_p, y_p)$$

Su ventaja es que los píxeles almacenados en un grupo de direcciones en una cinta se pueden utilizar directamente, pero el inconveniente es que la salida de los puntos de la imagen rectificada no es mas larga que aquellos con igual intervalo. Además, deben obtenerse las alturas Z_p de los puntos tomados por medio de un método concreto, normalmente mediante la interpolación en el *MDE* de los puntos regulares. Puesto que Z_p esta en función de X_p y de Y_p , se requiere de sucesivas iteraciones. Las ecuaciones teóricas para la transformación en el método directo son variadas. Por ejemplo, para las ecuaciones de la transformación proyectiva en cámaras convencionales, de acuerdo con las ecuaciones vista tenemos:

$$X - X_{o} = (Z - Z_{o}) \frac{a_{11}x + a_{12}y - a_{13}c}{a_{31}x + a_{33}y - a_{33}c}$$
$$Y - Y_{o} = (Z - Z_{o}) \frac{a_{21}x + a_{22}y - a_{23}c}{a_{31}x + a_{33}y - a_{33}c}$$



Figura 5. Método directo de rectificación digital.

Y para el caso de un sensor lineal, las ecuaciones son:

$$X - X_{o} = (Z - Z_{o}) \frac{m_{21}y - m_{31}c}{m_{23}y - m_{33}c}$$
$$Y - Y_{o} = (Z - Z_{o}) = \frac{m_{22}y - m_{32}c}{m_{23}y - m_{33}c}$$

Las ecuaciones de rectificación digital polinómicas son:

$$X_{p} = a_{0} + a_{1}x_{p} + a_{2}y_{p} + a_{3}x_{p}y_{p} + a_{4}x^{2}_{p} + a_{5}y^{2}_{p}$$
$$Y_{p} = b_{0} + b_{1}x_{p} + b_{2}y_{p} + b_{3}x_{p}y_{p} + b_{4}x^{2}_{p} + b_{5}y^{2}_{p}$$

Método inverso de rectificación digital

El otro proceso de rectificación es mediante el proceso indirecto, como muestra la figura 6. En este caso, comenzamos desde los nodos (X, Y) de una salida concreta regular del *MDE* para calcular inversamente la posición (x, y) de sus correspondientes puntos de la imagen. Aquí las alturas de los nodos del *MDT* son conocidas, y se pueden utilizar directamente, pero es necesario estimar la parte de la imagen a grabar con acceso directo.

Las ecuaciones de la transformación proyectiva para una cámara fotográfica convencional son:

$$x = -c \frac{m_{11}(X - X_{o}) + m_{12}(Y - Y_{o}) + m_{13}(Z - Z_{o})}{m_{31}(X - X_{o}) + m_{32}(Y - Y_{o}) + m_{33}(Z - Z_{o})}$$
$$y = -c \frac{m_{21}(X - X_{o}) + m_{22}(Y - Y_{o}) + m_{23}(Z - Z_{o})}{m_{31}(X - X_{o}) + m_{32}(Y - Y_{o}) + m_{33}(Z - Z_{o})}$$



Figura 6. Método inverso de rectificación digital.

En el método directo, las ecuaciones polinómicas simplificadas para rectificación se usan mas a menudo, tales como:

$$x_{p} = c_{0} + c_{1}X_{p} + c_{2}Y_{p} + c_{3}X_{p}Y_{p} + c_{4}X_{p}^{2} + c_{5}Y_{p}^{2}$$
$$y_{p} = d_{0} + d_{1}X_{p} + d_{2}Y_{p} + d_{3}X_{p}Y_{p} + d_{4}X_{p}^{2} + d_{5}Y_{p}^{2}$$

Puesto que los píxeles en la imagen original obtenida a través del cálculo inverso generalmente no se reduce a los puntos del muestreo en rectificación digital por el método indirecto, los valores de gris de estos puntos no se pueden leer directamente pero se pueden obtener por interpolación

11.8. Modelos matemáticos para la rectificación de la imagen

Las ecuaciones vistas anteriormente representan los modelos matemáticos básicos para la rectificación de la imagen mediante polinomios. Además, podemos también considerar otros esquemas descritos a continuación:

Polinomios generales.

El concepto básico de aproximación por polinomios generales se basa en la consideración de que la transformación de la imagen se puede ver como combinaciones de transformaciones básicas, tales como traslaciones, cambio de escala, rotación transformaciones afines, distorsión, curvatura, etc.. Estos polinomios pueden desarrollarse de la forma:

$$\Delta x_{i} = c_{0} + (c_{1}X_{i} + c_{2}Y_{i}) + (c_{3}X_{i}Y_{i} + c_{4}X_{i}^{2} + c_{5}Y_{i}^{2}) + \dots$$

$$\Delta y_{i} = d_{0} + d(_{1}X_{i} + d_{2}Y_{i}) + (d_{3}X_{i}Y_{i} + d_{4}X_{i}^{2} + d_{5}Y_{i}^{2}) + \dots$$

Para cada punto de control, cuando las coordenadas X_i , Y_i son conocidas, podemos tomar las citadas ecuaciones donde:

$$\Delta x_i = x_i - x_i'$$
$$\Delta y_i = y_i - y_i'$$

Aquí x_i , y_i se refieren al cálculo de los valores aproximados; x'_i , y'_i , se refieren a los valores medidos.

No es ventajoso tomar polinomios de orden alto, puesto que no es muy verosímil que las complicadas distorsiones de la imagen se puedan describir mediante polinomios.

Para reducir condición indispuesta de los coeficientes de la matriz de las ecuaciones normales en el ajuste procedente de una mala distribución de los puntos de control, podemos también considerar el uso de cierto tipo de polinomio ortogonal en lugar de la forma general de polinomios descritos a continuación.

Método de interpolación del campo estocástico.

Si las discrepancias entre las coordenadas imagen (obtenidas directamente o después del proceso) y que los puntos del terreno pueden ser visto en campo estocástico, podemos utilizar modelos simples, tales como la media aritmética de pesos, el método de movimiento medio,, colocación de mínimos cuadrados, etc.

Modelos polinómicos con cambios de los parámetros de orientación.

Para las imágenes procedentes de los sensores de escáner, los parámetros de orientación de los sensores (elementos de orientación externa) cambian con el tiempo (o coordenada x). Cuando se emplean los polinomios para describir los cambios de posición del escáner, podemos tener:

$$dX_{o} = a_{0} + a_{1}x + a_{2}x^{2} + \dots$$

$$dY_{o} = b_{0} + b_{1}x + b_{2}x^{2} + \dots$$

$$dZ_{o} = c_{0} + c_{1}x + c_{2}x^{2} + \dots$$

$$d\omega = d_{0} + d_{1}x + d_{2}x^{2} + \dots$$

$$d\phi = e_{0} + e_{1}x + e_{2}x^{2} + \dots$$

$$d\kappa = g_{0} + g_{1}x + g_{2}x^{2} + \dots$$

Rectificación de segmento discreto.

Para el propósito de la rectificación, podemos definir una rejilla regular (*Fig. 7*) en la salida de la imagen anteriormente con rejilla de líneas con coordenadas terreno conocidas. Cada cuadrado de la rejilla (representado en la figura como *ABCD*), representa un rectificado independiente en un área de la imagen, y sus cuatro esquinas son puntos de control para realizar la rectificación. Las coordenadas de cada punto en la imagen original se obtienen por medio de funciones de transformación de rectificación tales como ecuaciones de colineación. Así las proyecciones de los puntos de la rejilla en la salida de la imagen constituye un modelo de rejilla deformada en la imagen original como esta representado en la figura 7-derecha como *abcd*, y la transformación de los píxeles dentro de cada cuadrado de la rejilla se obtienen mediante las ecuaciones de interpolación (es decir ecuaciones bilineales).



Figura 7. Rejilla regular

Cuando se consideran las ondulaciones del terreno, es necesario establecer rejillas espaciales en el terreno y sus correspondientes modelos de rejilla deformada. Una rejilla espacial está compuesta por dos capas de rejillas planimétricas como muestra la figura 7. se localizan respectivamente en dos planos de altura máxima Z_2 y otra de altura mínima Z_1 la rejilla planimétrica de cada nivel tiene su modelo planimétrico deformado correspondiente (representado respectivamente por *abcd* y *efgh* en la figura 8) en la imagen.



Figura 8. Rejilla unidad

Esta figura ilustra la rejilla unidad. Asumiendo que un punto del terreno P (cuya altura es Z_P) se localiza en la rejilla unidad, entonces es fácil encontrar sus coordenadas $p_1(x_1, y_1)$ del punto de la imagen en *abcd* y las coordenadas del punto $p_2(x_2, y_2)$ basadas en las coordenadas planimétricas X_P , Y_P del punto. Finalmente, la posición de la imagen de $p(x_{,p}, y_p)$ del punto terreno P se puede obtener mediante interpolación lineal sobre el terreno, cuya altura Z_p se localiza entre aquellas imágenes de los puntos p_1 y p_2 de acuerdo con las siguientes ecuaciones.

$$x_{p} = x_{1} + \lambda(x_{2} - x_{1})$$
$$y_{p} = y_{1} + \lambda(y_{2} - y_{1}), \lambda = \frac{Z_{p} - Z_{1}}{Z_{2} - Z_{1}}$$

Bibliografía

- American Society of Photogrammetry. Manual of Photogrammetry, ASPRS, Cuarta Edición (1980). ISBN 0-937294-01-2.
- Delgado, J., Apuntes de Fotogrametría Digital, Universidad Politécnica de Jaén, 1997.
- Krauss, K., Photogrammetry, Dümmler/Bonn (1993), 3-427-78684-6.

- Rodriguez, V., Evaluation of the Stereoscopic Accuracy of the SPOT Satellite, PE&RS, 1988, vol.54, n°2, pp. 217-221.
- Wolf, P.R.; Dewitt, B. A, Elements of Photogrammetry with Applications in GIS, McGraw-Hill, EEUU, Tercera Edición (2000). 0-07-292454-3.
- Zhizhuo, W., Principles of Photogrammetry, (1990), 7-81030-00-8.
APÉNDICE A

Pliego de condiciones técnica para la obtención de cartografía y MDT a partir de fotografías aéreas.

Este Pliego de condiciones ha sido extraído del trabajo fin de carrera del alumno D. José Luis Escobar Bilbao, titulado "Cálculo de volúmenes en explotación de canteras".

Introducción

Este documento contiene las especificaciones técnicas aplicables en la contratación para la generación de los documentos necesarios y posterior cálculo de volúmenes entre los *MDT* resultantes en la zona objeto de trabajo a partir de dos vuelos fotogramétricos de diferentes fechas y posterior comprobación de calidad.

Será criterio del adjudicatario la utilización de uno u otro método para el cálculo del volumen pretendido, si bien, en la memoria descriptiva final se argumentará sobre el método elegido.

Como subproducto de este proyecto se generará una ortoimagen para la cual se adjuntan en el apartado correspondiente las oportunas especificaciones.

Se consideran todas las fases de la cadena de producción que afectan a la exactitud geométrica y calidad radiométrica del producto final, en el caso de la ortoimagen, incluyendo las especificaciones de captura de datos.

El objeto de este documento es fijar métodos definitivos y firmes para garantizar efectivamente la calidad de los resultados obtenidos.

Carácter y alcance de estas especificaciones

Estas especificaciones son de carácter descriptivo, es decir: expone lo que ha de hacerse, generalmente sin explicar el porqué.

Estas especificaciones evitan hacer suposiciones sobre el tipo de programación o equipo que se utilice. Sin embargo, para asegurar la calidad y homogeneidad en el trabajo, se ha supuesto que los equipos / programas posean ciertas características o funciones.

El alcance de estas especificaciones se define tanto en los procesos que han de seguirse como en el tipo de productos que se van a procesar.

Garantía de calidad

La garantía de calidad (GC) es una serie de métodos aplicados a conciencia y que, tomados en conjunto, conducen al resultado satisfactorio de un determinado proceso. Un sistema de GC fundado en estas especificaciones tiene normas procedimentales documentadas, plantillas y procedimientos específicos que contemplan varias comprobaciones.

Los controles de calidad (CC) y las auditorías de calidad (AC), son comprobaciones importantes dentro de un sistema de GC.

Control de calidad

El control (o comprobación) de calidad es una tarea claramente especificada, en la que se examinan todos o una muestra de los elementos, obtenidos durante o al final del proceso de producción, para asegurar una calidad satisfactoria del producto terminado. Este escrutinio comprende la revisión, inspección o medición cuantitativa, respecto a los criterios bien definidos de aceptación/rechazo que se establecen en estas especificaciones.

Auditorías de calidad

Una auditoría de calidad es un control cualitativo de la calidad que abarca todo un campo de actividad. *EUITM* normalmente nombra un auditor de calidad para que inspeccione un trabajo en curso en el local del contratista. Las auditorías de calidad se realizan por comparación de la práctica real con los procedimientos de garantía de calidad correspondientes, contenidos en estas especificaciones.

Registros de control de calidad

La información para realizar una *AC* procede principalmente de los *RCC* que generan durante el trabajo quienes lo realizan. Los *RCC* están ya definidos en este proyecto por *EUITM*, y son accesibles a todos aquellos que quieran tomar parte del concurso. El contratista deberá generar estos mismos *RCC* en cada una de las fases del trabajo.

Los aspectos importantes de un *RCC* son:

- que esté indicada la fecha
- que identifique cada artículo, operación o producto de que se trata
- que identifique a la persona que ha generado el RCC
- puede tener el visto bueno del supervisor o un inspector independiente (sólo los registros más importantes)
- que se conserve en un sitio bien definido y conocido para que otros lo puedan encontrar fácilmente.

Anexos

Al final de este documento y con categoría de Anexos se adjuntan tres documentos que ayudarán en la interpretación de estas especificaciones:

- 1. Glosario de términos, siglas y abreviaturas.
- 2. Definiciones
- 3. Referencias y bibliografía.

1. Referenciación geográfica

1.1. Sistema de referencia

El Sistema de Referencia a emplear en todos los trabajos será el denominado ED 50 (European

Datum 1.950), establecido reglamentariamente y constituido por:

- 1. Elipsoide Internacional (Hayford, 1.924).
- 2. a = 6.378.388 m. f = 1:297,0
- 3. Datum Potsdam (Torre de Helmert).
- 4. Orígenes de coordenadas geodésicas:
- 5. Latitudes referidas al Ecuador y consideradas positivas al Norte.
- 6. Longitudes referidas al meridiano de Greenwich y consideradas positivas al Este y negativas al Oeste del mismo.

1.2.Sistema Geodésico

El Sistema Geodésico que define la vigente Red Geodésica Nacional es el denominado RE 50 (Red de Europa Occidental, *1.950*), siendo el Instituto Geográfico Nacional el organismo responsable de constituir, conservar y difundir las señales, reseñas y coordenadas oficiales de los vértices de la Red.

Las altitudes geodésicas de los vértices, obtenidas desde las líneas de Nivelación de Alta Precisión establecidas por el Instituto Geográfico Nacional, quedan referidas al nivel medio del mar definido por Mareógrafo o escalas de mareas ubicados en diferentes puertos para las islas y ciudades de Ceuta y Melilla.

La precisión de las coordenadas del Sistema Geodésico queda limitada a la inherente de la compensación RE *50*, pudiendo cifrarse, para las zonas recubiertas por la Nueva Red Geodésica, en el orden de 0,07 m. para cada una de las tres coordenadas, precisión suficiente para los levantamientos cartográficos a la escala que considera el presente Pliego.

1.3. Sistema Cartográfico de Representación

El Sistema de Representación plana para la cartografía es la proyección conforme Universal Transversa de Mercator (UTM).

La transformación de coordenadas geodésicas a planas UTM (x,y) se efectuará aplicando las fórmulas completas de la citada proyección.

2.1. TRABAJOS DE FOTOGRAMETRIA.

2.1. Vuelo fotogramétrico

El vuelo fotogramétrico tiene por objeto la obtención de imágenes fotográficas de la zona a cartografíar. Estas fotografías deberán cumplir las condiciones técnicas necesarias para el fin propuesto. El vuelo se realizará en color de acuerdo a la decisión de la Dirección Técnica del Proyecto y a una escala no superior a 1/3.500

2.1.1. Condiciones técnicas del vuelo

2.1.1.1. Líneas de vuelo

La zona a fotografiar se cubrirá con una o más pasadas, en dirección Este-Oeste, excepto en casos particulares en los que justificadamente fuera conveniente cambiar la dirección y siempre bajo el siguiente condicionamiento:

- Los ejes de dos fotogramas sucesivos no formarán en caso alguno ángulos superiores a 3.
- Los ejes de dos fotogramas de número de orden n y n+2 no formarán ángulo superior a 3.
- Los ejes de las pasadas deben ser aproximadamente paralelos, de tal modo que la recta que une los puntos principales de los dos fotogramas extremos de una pasada no formará en caso alguno ángulo superior a 5 con las rectas análogas de las pasadas contiguas.

El recubrimiento longitudinal de los fotogramas será del 60% con un error máximo de $\pm 5\%$. Necesidades específicas pueden obligar a un recubrimiento mayor. El recubrimiento transversal será del 30%, con error máximo de $\pm 5\%$ pudiendo admitirse los límites extremos del 10% y 45% de recubrimiento cuando los desniveles del terreno superen el 10% de la altura de vuelo.

Todas las zonas delimitadas tendrán recubrimiento estereoscópico y, cuando las pasadas se interrumpan, existirá, por lo menos, un recubrimiento estereoscópico común.

2.1.1.3. Horas de vuelo

Deberá realizarse el vuelo en aquel espacio de tiempo en que el sol tenga una altura mayor de 35°

2.1.2. Condiciones técnicas de la cámara métrica

2.1.2.1. Condiciones generales

Para la obtención de la fotografía aérea se utilizará una cámara fotogramétrica de precisión (distancia mínima), dotada de los dispositivos necesarios para la correcta impresión de los fotogramas.

La cámara dispondrá de un objetivo de 150 mm \pm 5 mm de focal, debiendo obtenerse *fotogramas* de 23x23 cm.

Cuando las circunstancias específicas de la zona aconsejen utilizar otra focal, la altura de vuelo se determinará en función de la precisión requerida.

2.1.2.3. Documentación de la cámara métrica

La cámara estará provista del correspondiente certificado de calibración, efectuado, como máximo, dos años antes de la obtención de los fotogramas. Entre los documentos del vuelo figurará una copia de dicho certificado.

2.1.3. Condiciones técnicas de los fotogramas

2.1.3.1. Escala de los fotogramas

La escala de los fotogramas en los lugares de cota media de cada pasada se determinará en las Normas Específicas para cada escala del levantamiento.

La cota media de cada pasada se fijará como la media entre los puntos más alto y más bajo.

2.1.3.2. Verticalidad

La distancia nadiral de cada fotograma será siempre inferior a 3, rechazándose cuando el 6% de los fotogramas no cumplan esa condición.

2.1.3.3.Información complementaria

Cada *fotograma* llevará las referencias marginales necesarias para su identificación: organismo contratante, zona de vuelo, escala aproximada, número de pasada, número de fotograma, año, mes y hora de su obtención y altitud. También figurarán las características de la cámara utilizada (marca y distancia focal en mm y centésimas de mm) y número de fabricación, rechazándose los fotogramas carentes de toda o parte de esta información o aquellos en que la misma resulte ilegible.

2.1.3.4. Soporte de los fotogramas negativos

El soporte de la emulsión será de material dimensionalmente estable. No deberá tener contracciones

o dilataciones irregulares mayores del 0,05% en cualquier sentido.

2.1.3.5. Tipo de emulsión

La emulsión del a película será de grano fino, contrastada y con sensibilidad adecuada a la fotogrametría, con poder de resolución de 90 líneas/mm como mínimo

2.1.3.6. Negativos

No será aceptado ningún negativo que tenga el punto principal, o las imágenes de este mismo punto pertenecientes a fotos adyacentes cubiertas por nubes a sus sombras, brumas densas, humos o polvo denso.

Los negativos que tengan más de un 5% de superficie cubierta por alguna de las anomalías expresadas serán rechazados.

La entrega constará siempre de los negativos originales, en cuyo exterior constarán los datos precisos para su identificación. Figurarán nítidamente todas las marcas fiduciales.

Los valores densitométricos de los negativos no deberán exceder nunca los siguientes límites:

"El soporte del negativo revelado, en las partes donde resulta transparente, no deberá generar una densidad superior a 0,2".

"Las sombras tendrán una densidad mínima de 0,2 por encima del valor del soporte".

"Las zonas de densidad máxima no excederán el valor de 1,5 por encima del valor del soporte. Unicamente zonas del negativo sobreexpuestas como consecuencia de reflejos solares, podrán alcanzar el valor de 2,0 por encima del

2.1.3.7. Positivos

Junto con los negativos se acompañarán, al menos, dos copias por contacto de 23x23 cm. sobre papel fotográfico estable, blanco, mate, liso, de densidad uniforme y exentas de defecto alguno ("flou" y empañamiento del objetivo por descensos rápidos).

El papel de todas las copias será del mismo tipo y marca. Cada colección se entregará por separado, en sobres agrupados por pasadas. En el exterior de los sobres figurarán los datos necesarios para la identificación de su contenido.

Se entregarán junto con los negativos, un juego de positivos a color y otro en blanco y negro, así como un juego de diapositivas a color para su explotación fotogramétrica, cumpliendo los condicionantes técnicos antes expuestos.

2.1.4. Gráficos de vuelo

Para la situación relativa de cada uno de los fotogramas se establecerán los preceptivos gráficos de vuelo: croquis ordenados de pasadas y croquis ordenados de fotogramas, dibujados a la escala más adecuada de cada uno. En ellos figurarán los ejes de las pasadas y los recuadros de los fotogramas con su numeración correspondiente. Dichos ejes se representarán uniendo los puntos principales de los fotogramas cuyo número ordinal, dentro de la pasada, sea múltiplo de 5.

2.2. Apoyo Fotogramétrico.

2.2.1. Consideraciones Generales.

Los trabajos de apoyo comprenderán las operaciones de campo y gabinete necesarias para determinar la posición planimétrica y altimétrica de los puntos de apoyo (P.A.).

Los P.A. se levantarán por poligonación y radiación o por Geodesia Espacial (GPS), escogiendo en cada caso la manera que, garantizando las precisiones requeridas para el trabajo, resulte más cómoda, rápida o económica. Para ello, en el método de radiación sería aconsejable repetir la misma dos veces, tanto en ángulo como en distancia.

Para cada P.A. se realizará un croquis orientado de situación en el terreno, a una escala aproximadamente tres veces superior a la del fotograma. Los elementos reseñados en el croquis deben ser identificables en el fotograma. Se incluirá también el número de fotograma y pasada en que será pinchado el P.A. En todos los fotogramas en que aparezca, su posición quedará reflejada mediante una circunferencia de tinta negra, de diámetro aproximado de 10 mm., cuyo centro es el P.A.

También se anotará en tinta negra, al Oeste de cada círculo e inmediato a él, un número de referencia que identificará al P.A. en toda la documentación. Al Sur de este número se rotulará la altitud del punto.

En la colección de fotogramas se delimitará la zona objeto del levantamiento y en el gráfico del vuelo figurarán todos los P.A.

2.2.2. Condiciones planimétricas

La aplicación de las diferentes técnicas de observación deberá tener presente las siguientes condiciones:

- Trilateración: La red quedará constituída por cuadriláteros o figuras geométricas homogéneas que aseguren la superabundancia de medidas requeridas para la compensación de la trilateración. A las distancias medidas les serán aplicadas las necesarias correcciones para asegurar un error interno no superior a 10 p.p.m. de la distancia.
- Poligonación: Las poligonales de precisión se iniciarán y cerrarán sobre vértices de R.G., orientando principio y fin en lados de la misma. La longitud máxima del eje de la poligonal es función de la densidad de R.G. y de la escala del levantamiento. Los ángulos y distancias se medirán con las precisiones ya fijadas para la trilateración.
- Geodesia Espacial (GPS): Empleando de forma simultánea al menos tres receptores de doble frecuencia, enganchando al menos en cuatro vértices de la RGN.

2.2.3 Condiciones Altimétricas

Los Puntos de Apoyo recibirán altimetría bien desde los vértices de la Red Geodésica Nacional por método trigonométrico, bien desde las señales de la Red de Nivelación de Alta Precisión (clavos N.A.P. o N.G.) por nivelación geométrica o trigonométrica con medida de distancias cenitales recíprocas y simultáneas, detallándose en las Normas Específicas de cada escala las características y tolerancias de cada método.

2.3. Aerotriangulación

2.3.1. Preparación

En caso de ser realizada, se utilizará el método de Aerotriangulación Analítica/Digital con ajuste por

haces de rayos (PATB o similar) para la obtención de coordenadas terreno de los puntos fotogramétricos que permitan la posterior "orientación absoluta" de todos los modelos fotogramétricos.

Una vez recibidas las colecciones, una de contactos y otras de diapositivas, se procederá a su reordenación por pasadas y sentido de pasada, siempre de izquierda a derecha según gráfico de vuelo. Se tendrá especial cuidado en la elección tanto de la posición como el número de puntos de apoyo que servirán para el ajuste del bloque, así como de las cadenas altimétricas necesarias y siempre bajo la final aprobación del Director del Proyecto Cartográfico.

Cada punto de apoyo será rotulado en todos los fotogramas a los que pertenece, al objeto de que el operador lo mida en todos los modelos afectados por el mismo.

El número de puntos fotogramétricos por modelo será como mínimo de seis, ocupando las posiciones teóricas dé los puntos Gruber, siendo transferidos a las pasadas adyacentes sin ninguna omisión, es decir, en el caso de una transferencia defectuosa se procederá a la selección de un punto alternativo y a su correcta transferencia.

Se elegirán para la transferencia zonas preferentemente llanas y con buen contraste fotográfico, garantizando de esta forma una mayor precisión en el posicionamiento del operador.

Se rodeará en el contacto con un círculo, con la mayor fidelidad posible, la zona homóloga donde se ha transferido la marca en la diapositiva.

Tanto el círculo como el número serán de color negro si son puntos propios del fotograma, y de color rojo si son transferidos.

Para la numeración se establecerá el siguiente criterio:

- Las dos primeras cifras significarán la pasada.
- Las tres siguientes serán las tres últimas cifras del fotograma

2.3.3. Medición

En esta fase se conseguirán las coordenadas modelo de todos y cada uno de los puntos, tanto los aerotriangulados como los de control terrestre.

Para la orientación interna de los modelos, se precisará la calibración más reciente de la cámara fotogramétrica utilizada para el vuelo.

En la orientación relativa se asegurará la eliminación de paralajes verticales en todo el modelo y se registrarán las coordenadas modelo de los puntos observados, a fin de configurar un archivo (en formato ASCII) de entrada al programa de cálculo.

No se admitirán puntos con paralajes residuales mayores de 3 micrones y el error medio cuadrático de todos ellos no superará los 2 micrones.

2.3.4. Ajuste y compensación.

Para esta fase se utilizará el programa de cálculo PATB o similar, con detección de errores sistemáticos.

La precisión final de los puntos fotogramétricos no superará los 8 micrones en planimetría y los 15 micrones en altimetría. En cuanto a los puntos de apoyo la precisión queda determinada en las condiciones específicas para cada escala.

La restitución se realizará a la escala designada en las Normas Específicas, utilizando restituidores analíticos de 1er orden con precisiones instrumentales nunca mayores de 3 micrones.

El conjunto de las minutas formará una retícula, de tal forma que los puntos perimetrales de las hojas adyacentes sean coincidentes.

2.4. Formación de la minuta fotogramétrica

2.4.1. Condiciones de la Restitución

La restitución se realizará a la escala designada en las normas específicas utilizando restituidores analíticos de ler orden con precisiones instrumentales nuca mayores de 3 micrones. El conjunto de las minutas formará una retícula de tal forma que los puntos perimetrales de las hojas adyacentes sean coincidentes.

2.4.2. Ajuste de pares estereoscópicos

Para cada ajuste se hará una ficha en la que se indicarán los parámetros angulares y lineales del mismo, así como los valores de los errores residuales en los puntos de apoyo, tanto planimétricos como altimétricos, incluyendo un croquis de la situación de los puntos de apoyo.

Las tolerancias para los errores residuales serán:

- Para planimetría: 0,1 M /1000 (metros)
- Para altimetría:0,2 H /1000 (metros)

siendo M el denominador de la escala del plano y H la altura de vuelo expresada en metros.

2.4.3. Condiciones de la información a restituir.

2.4.3.1.Planimetría.

La restitución planimétrica deberá reflejar todos los detalles identificables, con dimensión mínima de 1 mm. a escala, en su exacta posición y verdadera forma. Para los de menor dimensión se utilizarán los signos convencionales relativos a cada escala.

2.4.3.2.Altimetría

El relieve se representará por curvas de nivel normales y maestras, cuya equidistancia se fijará en las Normas Específicas de cada escala. En terrenos de relieve poco acusado se procederá al empleo de curvas intercalares y densificación del número de puntos acotados.

2.4.3.3.Parcelación

Las Normas Específicas regularán para cada escala la representación parcelaria.

2.4.4.Revisión de campo

Formada la restitución fotogramétrica, se procederá a la reglamentaria revisión de campo, utilizando al efecto un plot de la misma en la que se situarán todos aquellos detalles que, no identificados en la restitución, se consideren necesarios para la publicación. En esta revisión se llevará a cabo la correcta recogida de la toponimia.

2.4.5. Toponimia

En los mapas y planos se reflejarán los topónimos de la zona, tales como accidentes geográficos,

parajes, etc., respetando las modalidades dialécticas y cuidando de emplear la ortografía oficial correspondiente de la Comunidad. Se acentuarán las letras mayúsculas que ortográficamente lo requieran, no haciendo uso de la licencia de su supresión aceptada en tipografía e inadmisible en cartografía.

Los vértices geodésicos se rotularán de acuerdo con el nombre que figure en la Base de Datos Geodésicos del S.I.G., cuyos datos serán susceptibles de variación si se demuestra la existencia de error manifiesto.

Deberán rotularse también edificios que tengan nombre propio y construcciones aisladas de importancia (monasterios, ermitas, presas, molinos, *fábricas*, granjas, etc.), así como todas las instalaciones destinadas a usos y servicios públicos. Los caminos y cañadas se rotularán con su nombre propio. En la zona urbana se rotularán y delimitarán distritos y barrios.

La abundancia de la toponimia será la correspondiente a cada escala.

2.5.Ortocorrección de la fotografía aérea

2.5.1.Entrada de datos

Es esencial que los materiales y equipos con los que se crean los datos de entrada sean de calidad. Todo proceso digital debe realizar una valoración de la calidad de los datos de entrada, para comprobar que las imágenes se captan y se digitalizan correctamente.

Elemento	Especificación	RCC/CC internos
Película	Película pancromática aérea de	Verificación física de la película [interior/orientación
	alta resolución	relativa en diapositivas (si se producen)], medios de
		revelado e impresion, documentación tecnica de los
Cámara	Cámara moderna de alta calidad	Inspección físico
Califara	con compensación del	Certificado de calibración de la cámara con fecha
	movimiento hacia delante v	estampada
	exposición mandada por	(normalmente con validez de 2 años)
	ordenador.	
Navegación	Cámara conectada con INS a	Inspección física.
en vuelo	bordo. Registro de fotos por	Inspección de datos del vuelo. Comprobar que las
	GPS.	posiciones de la cámara sirven para el ajuste de
		bloques con GPS.
Totalidad	Longitudinal 60%, lateral 15-	Analizar el registro de fotocentros y altura de vuelo
del solape	25% 100% de cohertura con el solano	para comprobar el cumplimiento de totalidad, solape y
	especificado	En ausencia de datos de vuelo, desplegar fotos
Variación de	especificado.	Identificar aguieros.
la escala	Variación de la escala <+ 10%	
Scanner,	Utilizar scanner de precisión.	Inspección física.
materiales y	(por ejemplo: Zeiss SCAI, LH	Debe probarse la orientación interior de toda muestra
equipos	DSW, Photoscan TD)	pasada por el scanner (10%). Rechazar toda la partida
	Si fuera posible, se deben	si el RMSE de cuatro esquinas fiduciales es $>15\mu m$
	escanear los negativos (salida	con muestra del 10%.
Tamaño del	(21) (21) (21) (21)	Imprimir los matadata da archivos digitalas (listados y
nixel pasado	$\leq 21 \mu m (0/1)$	dimensión del archivo en hytes)
por el scanner		Calcular la resolución a partir del tamaño de la
r ········		película (pixeles/líneas).

FOTOGRAMETRÍA III

Precisión del	RMSE de geometría del scanner	Pruebas repetidas con scanner sobre cuadrícula
Scanner	< 5 µm	fotogramétrica, medir al menos 5 x 5 puntos.
	No residual > 15µm.	Calcular residuos x e y, y RMSE (x e y) tras transformación afin.
		Ensayar antes de empezar el escaneo, luego repetir a intervalos regulares, según la estabilidad del sistema. Indicar en un gráfico o tabla de control el RMSE y residuo máximo por línea y columna.

Tabla A.1. Especificación de datos de entrada para garantía de calidad

Nótese que en la tabla anterior se incluyen CC sobre los datos originales del vuelo que el contratista deberá requerir y/ó realizar en diferentes etapas del proyecto para detectar a tiempo los fallos que no garanticen la calidad del producto final.

Es obligatorio y eficaz además realizar *CC* radiométrico sobre los datos digitalizados (del scanner) al mismo tiempo que los *CC* de geometría. Las comprobaciones iniciales aseguran generalmente que los ángulos solares respecto a la dirección de vuelo y al tiempo sean aceptables para evitar el exceso de deslumbramiento y sombra, que no haya nubes en las fotos y que los aspectos de interés tengan suficiente contraste. La comprobación posterior al scanner debe examinar los histogramas de las imágenes para asegurar que se aproveche plenamente el rango dinámico disponible sin saturación ni cortes.

2.5.2. Requisitos de digitalización de las imágenes.

Estas especificaciones persiguen la GC geométrica y radiométrica de la digitalización de fotografías aéreas en color.

- La película original (o alternativamente, las diapositivas) se digitalizará sobre un escáner fotogramétrico, incluyendo toda la superficie enmarcada por las marcas fiduciales y ellas mismas, con las siguientes características:
- Precisión geométrica < 4µm.
- Resolución geométrica de 21 μm.
- Resolución radiométrica final de 8-bit por pixel, para representar al menos 256 niveles de gris.
- Las imágenes resultantes cumplirán con las siguientes especificaciones técnicas:
- Clara visibilidad de las marcas fiduciales.
- La saturación de la imagen no debe superar el 1%, permitiendo un máximo del 0.5% a cada lado del histograma.
- Uso efectivo de los 8-bit por pixel, determinando aquellos valores de gris que no estén representados en los pixels de salida.
- Correcto etiquetado de las imágenes y almacenamiento en los CD-ROM.
- Apariencia visual correcta.
- Las imágenes deben escanearse hacia el Norte, salvo en los casos en los que el vuelo sea oblicuo, en cuyo caso se escanearán todas en la dirección más próxima al Norte.
- El formato de salida de las imágenes será TIFF 5 plano (no comprimido, no Tiled).
- No se debe realizarse en esta fase ningún proceso de repixelación de forma que la imagen obtenida contenga toda la información.
- El escáner habrá sido calibrado y certificado su buen uso por el fabricante o centro autorizado por él. El certificado de calibración será considerado como válido durante el tiempo que esté estipulado.
- El proceso de escaneo será chequeado frecuentemente, realizando controles de calidad tanto geométrico como radiométrico semanalmente. El informe de garantía de calidad deberá incluir, además del certificado de calibración del scanner:

- Detalles del control de calidad geométrico. Precisión y residuos de la transformación afín entre las observaciones, sobre la imagen de una placa fotogramétrica calibrada y sus posiciones de referencia.
- Detalles del control de calidad radiométrico sobre la imagen de una cuña de densidades. Estimación del nivel de ruido radiométrico (en valores de gris), cobertura del rango dinámico (en valores de Densidad) y linealidad de tonos en dicho rango (gráfico 'densidad entrada – nivel de salida').
- Información sobre los tests de calidad de las imágenes escaneadas, para el aseguramiento del cumplimiento de las especificaciones técnicas:
- Gráficos de histograma.
- Base de datos con información estadística para cada imagen.
- Ficheros de escaneo (parámetros empleados en la captura de cada imagen).
- Base de datos con información adicional para cada imagen.

2.5.3. Proceso de corrección geométrica de fotos aéreas.

La tabla 2 presenta una especificación de todas las fases del proceso de ortocorrección de fotos aéreas. Las medidas correspondientes a cada tolerancia sirven para obtener la entrada cuantitativa de los **RCC**. Las fases que se deben seguir se describen a continuación:

Fase	Procedimiento práctico	Tolerancia aceptable
Espaciado de	Especificarla según la escala de	20 a 50 veces la dimensión de
la cuadrícula del	salida y el terreno	salida del pixel
DEM		
Exactitud	Generación automática del DEM mediante	Se requiere 2 x 1-D RMSE
Altimétrica	DPW's estéreo empleando métodos de	planimétricos.
del DEM	correlación automática	
	Normalmente se requiere mirar y	
	limpiar la salida.	
Puntos de	Se puede hacer a mano, pero debe hacerse	AT automática: mínimo de 12
enlace para	automáticamente [*] si el programa informático	puntos por modelo con buena
triangulación	lo permite.	distribución (Von Grüber)
aérea		Selección manual: mínimo 6 por
		modelo.
Orientación	Transformación afin de las fiduciales.	RMSE <20µm (8 fiduciales)
Interior	Usar ocho fiduciales [*] , o las fiduciales de las	RMSE<15µm (4 fiduciales)
	cuatro esquinas si no existieran ocho.	
		Residuo máximo de 30µm
Orientación	No es aplicable con triangulación	Máximo RMSE en paralaje y de
Relativa	automática en un entorno DPW	10µm.
Orientación	Medir las coordenadas del modelo y	RMSE en los puntos de control
Absoluta	transformarlas al terreno	procedentes del ajuste del
		bloque <0,5x del RMSE
		especificado en el producto
Método de	Preferiblemente por convolución cúbica, pero	No existe.
Remuestreo *	se acepta bilineal.	
Recomendado		

Tabla A.2 - Especificación para el ortoproceso de la fotografía aérea

2.5.4. Aerotriangulación.

El método que deberá emplearse para la aerotriangulación será completamente digital, utilizando algoritmos de compensación mínimos cuadrados de bloques fotogramétricos mediante haces perspectivos.

La orientación interior se debe realizar mediante transformación afín, utilizando las ocho marcas fiduciales siempre que sea posible, ó bien las cuatro de las esquinas. El RMS será inferior a 20 μ m ó 15 μ m, respectivamente, mientras que el residuo máximo en las fiduciales será, en ambos casos, inferior a 30 μ m.

Para la formación del bloque fotogramétrico, se deben obtener un mínimo de seis puntos por modelo en caso de medirlos manualmente, doce en caso de realizarse de forma automática, situados en las zonas von Grüber. En el caso en el que las pasadas estén desfasadas se introducirán puntos auxiliares para conectar adecuadamente las mismas.

Los resultados del ajuste del bloque deben conducir a un RMSE inferior a un metro en las tres componentes X,Y,Z. Las precisiones internas del bloque deben estar por debajo de 25 µm.

Se debe entregar un informe del ajuste de cada bloque sobre los puntos de control y de chequeo, indicando el RMSE y los residuos individuales en cada punto. Además, como RCC adicional, el resultado de las orientaciones absolutas de cada modelo estereoscópico, considerando como puntos de control los puntos de enlace y apoyo empleados en el ajuste del bloque.

Los resultados de la orientación interior y exterior se almacenarán, para cada fotograma, en una base de datos, de manera que se tenga una rápida disponibilidad de los mismos para realizar controles de calidad externos u otras aplicaciones.

2.5.5.Ortorrectificación

Las imágenes serán ortorrectificadas con el uso de un sistema de interpretación completamente digital a fin de obtener una mayor calidad que por otros métodos y facilitar los tratamientos posteriores de la información generada, así como su integración en bases de datos y posterior distribución.

El DEM debe generarse por correlación automática a partir de los pares estereoscópicos obtenidos tras el proceso de la aerotriangulación digital, realizándose la depuración y edición del mismo interactivamente. Se elegirán las estrategias de cálculo para la herramienta de autocorrelación, en función de las características del terreno encontrado en cada modelo.

La densidad de puntos del MDT será acorde con la escala final y el terreno. Para zonas montañosas de definirá un Grid de 20 metros, que se podrá aumentar hasta un máximo de 50 metros si el relieve es menos acentuado.

La precisión altimétrica será tal que el error medio cuadrático resulte inferior a 5 m. Como GC interna se realizará una comparación entre el modelo digital del terreno depurado y puntos de chequeo vertical procedentes de la aerotriangulación, obteniéndose además el residuo en cada punto.

El cálculo de la ortofoto se realizará a partir del modelo digital del terreno obtenido y los datos de orientación resultantes de la aerotriangulación, introduciendo correcciones de esfericidad, refracción y distorsiones de la cámara. El método de remuestreo se hará por interpolación bilineal o bicúbica para preservar la interpretabilidad del producto final.

El tamaño de pixel de la ortofoto será de un metro y la resolución radiométrica de 8 bits (256 niveles de gris).

Se realizará el mosaico digital de las ortofotos, de forma que la línea de unión quede lo más

disimulada posible, realizando un ajuste radiométrico conjunto de todas ellas.

La ortofoto digital será procesada mediante el empleo de todas las técnicas de filtrado digital disponibles para realzar la calidad visual del producto.

2.5.6. RCC y auditorías de calidad de la ortocorrección de la fotografía aérea

Los siguientes RCC debe generarlos el contratista para su CC interno. Deberá facilitarlos para su inspección durante la auditoría de calidad que lleve a cabo un representante de Tragsatec. En la tabla 5 figuran dos grados de auditoría de calidad: "normal" y "estricto".

Las comprobaciones de calidad "normales", que se efectúan "una vez", se repiten si se solicita una medida correctora.

Las comprobaciones de calidad "estrictas" siguen el rastro de los productos "sospechosos", y se realizan si:

- las auditorías anteriores originan dudas acerca del rendimiento;
- los resultados de los CC no cumplen las especificaciones expresadas en los apartados anteriores;
- los resultados del los CC externos no cumplen las tolerancias de las especificaciones de la petición de oferta.

RCC	Formato	Grado en Producción	Grado de la	Fase normal
	uerkee	del	(muestreo)	ue la AC externa
		Contratista	(
Certificado de calibración de la cámara	Papel	Suministrado	Normal (100%)	Antes del vuelo
Datos del vuelo comprendiendo registro de los fotocentros y alturas de vuelo	Archivos ASCII o SIG	Suministrado	Normal (100%)	Antes de pasar por scanner (o 10 días después del vuelo)
Control de calidad (geométrica) del scanner	Papel/gráfico y BDD	Cada 7 días, luego 14 si es estable	Normal (una vez)	Desde empezar el paso por el scanner en adelante
Certificado de formación/CV de los operadores de las DPW's	Papel	-	Normal (100%)	Principio de la AT
Tabla de datos de referencias terrestres de los GCP y puntos de comprobación (con fines de CC interno)	Papel y BDD	100%	Normal (100%)	Fin de la AT
Resultados de la orientación interior y exterior	Papel y BDD	100%	Normal (al principio) Estricto (sospecha)	Fin de la AT
Número de elementos rechazados o reprocesados en cada fase del CC interno	Papel y BDD	Lista completa	Normal (mensual)	No existe
Examen de los DEM: visualización digital estéreo con datos de los DEM superpuestos.	Papel y BDD	100%	Normal (una vez) Estricto (sospecha)	Principio de la ortocorrección

FOTOGRAMETRÍA III

Comparación de los DEM con los puntos de comprobación verticales	Papel	100%	Primer DEM Normal	Principio de la ortocorrección
(con puntos verticales de AT)			(10%)	
Residuos del ajuste de bloques en los	Papel ,	100%	Normal (una	Producción de
puntos de control	digital		vez)	ortoimágenes
	Informes del		Estricto	
	programa		(sospecha)	
RMSE de los ajustes de bloque sobre	Papel o	100%	Normal	Producción de
los puntos de comprobación del	digital		(100% de los	ortoimágenes
contratista, incluyendo residuos	informes del		bloques)	
individuales.	programa			
Datos de ortoimágenes y mosaicos	BDD	100%	Normal	Principio de
			(10%)	la producción
			Estricto	del ortomosaico
			(100%)	
Ortoimágenes (resultado de la	Papel y BDD	100%	Normal	Producción de
inspección)			(10%)	Ortoimágenes

Tabla A.3 - Producción de RCC	y su emp	leo en ortoimá	genes aéreas
-------------------------------	----------	----------------	--------------

3. CONSIDERACIONES ESPECÍFICAS PARA LA CARTOGRAFIA A ESCALA 1/500

3.1. Aspectos de contenido general.

3.1.1. Formato

El formato será definido para cada caso concreto por el Director del Proyecto Cartográfico.

3.1.2. Designación de las hojas

La denominación de cada hoja se hará del modo general, especificando el Director del Proyecto Cartográfico la forma y condición para cada caso concreto.

3.1.3. Cuadrícula UTM

La referencia que figurará en todas las hojas será la Cuadrícula Universal Transversa Mercator (CUTM). La cuadrícula se dibujará cada 100 m. (100 mm.). Se rotularán las coordenadas, con todas sus cifras, en las barras más próximas a la esquina

3.1.4. Equidistancia entre curvas de nivel

Como norma general, la equidistancia de curvas será de un metro, con curvas directoras cada 5 m., numeradas, si bien, en este caso, y siendo el objeto principal del proyecto una cubicación, si al dirección facultativa del proyecto lo estimara oportuno, se recogerán curvas de nivel cada 0,5 metros y directoras cada 2,5 metros.

3.1.5. Elementos altimétricos, planimétricos, símbolos y formato

Los elementos altimétricos y planimétricos a representar, así como el formato y la simbología, quedarán fijados por el Director del Proyecto Cartográfico.

3.1.6. Parcelas a representar

Para el levantamiento del parcelario se diferenciarán dos tipos: Parcelario rústico y parcelario urbano.

Tanto en uno como en otro caso deberán tomarse los datos necesarios para delimitar las parcelas, así como la definición de sus características. En el caso de las parcelas urbanas figurarán los detalles que a continuación se relacionan:

- El perímetro de las fachadas entre las distintas unidades urbanas.
- Rotulación de la nomenclatura de las vías públicas, plazas y edificios
- representativos, públicos y privados.
- Cuantos detalles en calles y edificios se deban representar a esta escala y estén reseñados en los signos convencionales. Se restituirá el parcelario aparente (visible en la foto), debiendo completarse posteriormente en campo.

3.1.7 Puntos acotados a definir en altimetría

Deberán figurar las cotas de los vértices geodésicos, señales de nivelación, vértices topográficos (si están señalizados en el terreno de forma permanente), puntos de apoyo (perfectamente definidos y representables), cumbres, collados, estaciones y cruces de vías de FC, pasos a distinto nivel (arriba y abajo), cambios de pendientes en carreteras, caminos y calles, coronación de presas, líneas de máximo embalse, aliviaderos, todos los cruces de vías de comunicación y otros detalles planimétricos que por su significado sea importante reflejar.

En las zonas de relieve poco acusado se deberá aumentar el número de puntos acotados a efectos de una mejor representación y se intercalarán curvas de nivel con un equidistancia de 0.5 m. En los cascos urbanos se acotarán los cruces de las calles y las plazas.

4. Instrucciones técnicas para trabajos de apoyo

Los trabajos de apoyo comprenderán las operaciones de campo y gabinete que sean necesarias para determinar la posición planimétrica y altimétrica de los puntos de apoyo con las tolerancias establecidas.

3.2.1. Puntos de apoyo fotogramétrico

La zona objeto de levantamiento se delimitará previamente en la colección de fotogramas. La posición de los puntos de apoyo se determinará por Geodesia Espacial o por topografía clásica (poligonación y radiación).

Para cada punto de apoyo fotogramétrico observado se realizará el croquis de situación en el terreno, orientado al Norte, a una escala aproximada de tres veces superior a la de la fotografía. Los elementos reseñados en este croquis deberán figurar en la fotografía. Se incluirá también el número de fotograma y la pasada en que está pinchado el punto de apoyo. La posición de este punto quedará marcada en todos los fotogramas en que aparezca mediante un círculo dibujado en tinta negra de un diámetro aproximado de 10 mm. y cuyo centro sea dicho punto pinchado. También se anotará en tinta negra al Oeste de cada círculo e inmediato a él un número de referencia, con el cual se denominará dicho punto en toda la documentación. Al Sur del número de referencia se rotulará la cota altimétrica del punto. En el gráfico de vuelo figurarán los puntos de apoyo rotulados con su número de referencia.

Las coordenadas de los puntos de apoyo se calcularán mediante programas de ordenador contrastados, haciendo entrega de los resultados, compensación y elipses de error y su conjunto será homogéneo con la red de triangulación.

3.2.2 Precisiones

Planimetría: el error medio de las coordenadas de los puntos de apoyo será como máximo ±0,1 m.

Altimetría: El error medio en altitud de los puntos de apoyo será como máximo $\pm 0,1$ m.

3.3. Formación de la minuta

3.3.1. Restitución fotogramétrica

La restitución numérica sobre sistemas analíticos se hará a escala 1/500, empleando restituidores analíticos de 1er orden con precisiones instrumentales nunca mayores de 3 micrones.

El conjunto de las minutas formará una retícula, de tal forma que los puntos perimetrales de las hojas adyacentes sean coincidentes.

3.3.2. Condiciones de la información a restituir

Planimetría.

La restitución planimétrica deberá representar todos los detalles identificables en su exacta posición y verdadera forma.

Altimetría.

El relieve se representará por curvas de nivel con equidistancia de 1 m. y curvas maestras cada 5 m. Se rotulará en las curvas maestras su altitud.

En los embalses, además de la curva de máxima capacidad, se continuará el trazado de curvas de nivel hasta la lámina de agua reflejada en el vuelo.

3.3.3. Revisión de campo

a) Zona urbana

En la restitución de zonas urbanas es necesario tener en cuenta que las minutas así obtenidas tienen omisiones importantes que obligan a una revisión de campo.

Entre las omisiones cabe destacar la existencia de detalles ocultos por sombras, árboles u obstáculos artificiales o naturales y la de los detalles no perceptibles en la foto.

Existe, además, una gran cantidad de datos cuya obtención sólo es posible en el terreno, como son la nomenclatura de calles y plazas, edificios representativos, monumentos, etc.

b) Zona rústica

Se tomarán y comprobarán en campo todos los datos planimétricos necesarios para la formación de la minuta, siendo fundamental y obligatorio el levantamiento de los detalles ocultos en los fotogramas.

4. Documentación a entregar.

Se presentará la siguiente documentación:

Memoria descriptiva de los trabajos realizados con exposición detallada y pormenorizada de los siguientes apartados:

- Objeto del proyecto cartográfico, instrumentación y metodología.
- Trabajos de campo y trabajos de gabinete. Precisiones y errores con salidas de ordenador. Disquetes con todos los datos planimétricos y altimétricos originales de campo. Reseña de vértices.
- Vuelo fotogramétrico: proyecto de vuelo, instrumentos utilizados y calibración de la cámara métrica.
- Apoyo fotogramétrico: puntos de apoyo en piano a escala adecuada. Trabajos de campo y trabajos de gabinete. Precisiones y errores con salidas de ordenador. Reseña de puntos de apoyo. Colección de contactos pinchados con su número correspondiente.
- Cartografía numérica final: colección de pianos originales de todas las hojas a su escala en formato digital compatible con los sistemas gráficos de la EUITM, en los que estarán contenidos todos los detalles y elementos objeto del presente proyecto, con su correcto tratamiento cartográfico.
- Justificación del cálculo del volumen de explotación por los resultados comparativos de los dos vuelos utilizados.

APÉNDICE B

COMPLEMENTOS DE AEROTRIANGULACIÓN

- 1. Derivadas parciales de la transformación tridimensional de coordenadas
- 2. Derivadas parciales de la transformación tridimensional utilizando la matriz de rotación aproximada.
- 3. Coeficientes de la función Fx, Fy *(Ecuaciones de colinealidad)*
- 4. Estrategia eficiente de cálculo para aerotriangulación.
- 5. Precisión en aerotriangulación
- 5.1. Modelos independientes 5.2. Ajuste de haces

1. Derivadas parciales de la transformación tridimensional de coordenadas.

Partiendo de la función descrita en el tema de aerotriangulación por modelos independientes, que tiene la forma:

Fx		X _i		T_{x}		$\begin{bmatrix} X \end{bmatrix}$	
Fy	$=\lambda_{j} [R]_{j}$	\mathbf{y}_{i}	+	T _y	_	Y	
Fz		Zi	j	T _z	i	Z	i

donde las incógnitas a determinar serán los siete parámetros de la transformación (λ , Ω , Φ , K, Tx, Ty, Tz) más las incógnitas adicionales que introduzcan los puntos de control menor y centros de proyección.

Debido a la naturaleza no lineal de estas ecuaciones, es necesario para su resolución linealizarlas utilizando el desarrollo en serie de Taylor hasta infinitésimos de primer orden, obteniendo las expresiones siguientes:

$$\begin{split} Fx &= 0 = \left(Fx\right)_{0} - \left(\frac{\partial Fx}{\partial X}\right)_{0} dX + \left(\frac{\partial Fx}{\partial \lambda}\right)_{0} d\lambda + \left(\frac{\partial Fx}{\partial \Omega}\right)_{0} d\Omega + \left(\frac{\partial Fx}{\partial \Phi}\right)_{0} d\Phi + \\ &+ \left(\frac{\partial Fx}{\partial K}\right)_{0} dK + \left(\frac{\partial Fx}{\partial T_{x}}\right)_{0} dT_{x} + \left(\frac{\partial Fx}{\partial T_{y}}\right)_{0} dT_{y} + \left(\frac{\partial Fx}{\partial T_{z}}\right)_{0} dT_{z} - \left(\frac{\partial Fx}{\partial X}\right)_{0} dX \\ Fy &= 0 = \left(Fy\right)_{0} - \left(\frac{\partial Fy}{\partial X}\right)_{0} dX + \left(\frac{\partial Fy}{\partial \lambda}\right)_{0} d\lambda + \left(\frac{\partial Fy}{\partial \Omega}\right)_{0} d\Omega + \left(\frac{\partial Fy}{\partial \Phi}\right)_{0} d\Phi + \\ &+ \left(\frac{\partial Fy}{\partial K}\right)_{0} dK + \left(\frac{\partial Fy}{\partial T_{x}}\right)_{0} dT_{x} + \left(\frac{\partial Fy}{\partial T_{y}}\right)_{0} dT_{y} + \left(\frac{\partial Fy}{\partial T_{z}}\right)_{0} dT_{z} - \left(\frac{\partial Fy}{\partial Y}\right)_{0} dY \\ Fz &= 0 = \left(Fz\right)_{0} - \left(\frac{\partial Fz}{\partial X}\right)_{0} dX + \left(\frac{\partial Fz}{\partial \lambda}\right)_{0} d\lambda + \left(\frac{\partial Fz}{\partial \Omega}\right)_{0} d\Omega + \left(\frac{\partial Fz}{\partial \Phi}\right)_{0} d\Phi + \\ &+ \left(\frac{\partial Fz}{\partial K}\right)_{0} dK + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{x}}\right)_{0} dT_{x} + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{y}}\right)_{0} dX + \left(\frac{\partial Fz}{\partial \Omega}\right)_{0} d\Omega + \left(\frac{\partial Fz}{\partial \Phi}\right)_{0} d\Phi + \\ &+ \left(\frac{\partial Fz}{\partial K}\right)_{0} dK + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{x}}\right)_{0} dT_{x} + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{y}}\right)_{0} dT_{y} + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{z}}\right)_{0} dT_{z} - \left(\frac{\partial Fz}{\partial Z}\right)_{0} dZ + \\ &+ \left(\frac{\partial Fz}{\partial K}\right)_{0} dK + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{x}}\right)_{0} dT_{x} + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{y}}\right)_{0} dT_{y} + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{z}}\right)_{0} dT_{z} - \left(\frac{\partial Fz}{\partial Z}\right)_{0} dZ + \\ &+ \left(\frac{\partial Fz}{\partial K}\right)_{0} dK + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{x}}\right)_{0} dT_{y} + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{z}}\right)_{0} dT_{z} - \left(\frac{\partial Fz}{\partial Z}\right)_{0} dZ + \\ &+ \left(\frac{\partial Fz}{\partial K}\right)_{0} dK + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{x}}\right)_{0} dT_{y} + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{z}}\right)_{0} dT_{z} - \left(\frac{\partial Fz}{\partial Z}\right)_{0} dZ + \\ &+ \left(\frac{\partial Fz}{\partial K}\right)_{0} dK + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{x}}\right)_{0} dT_{y} + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{z}}\right)_{0} dT_{z} - \left(\frac{\partial Fz}{\partial Z}\right)_{0} dZ + \\ &+ \left(\frac{\partial Fz}{\partial K}\right)_{0} dK + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{x}}\right)_{0} dT_{z} + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{y}}\right)_{0} dT_{z} + \\ &+ \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{z}}\right)_{0} dT_{z} + \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{z}}\right)_{0} dT_{z} + \\ &+ \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{z}}\right)_{0} dK + \\ &+ \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{y}}\right)_{0} dT_{z} + \\ &+ \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{z}}\right)_{0} dT_{z} + \\ &+ \left(\frac{\partial Fz}{\partial T_{z}}$$

Las derivadas parciales de las funciones F_X , F_Y , F_Z son:

$$\begin{split} &\frac{\partial Fx}{\partial \lambda} = x \ a_{11} + y \ a_{12} + z \ a_{13} = r_{11} \\ &\frac{\partial Fx}{\partial \Omega} = 0 = r_{12} \\ &\frac{\partial Fx}{\partial \Phi} = \lambda \left[-x \left(\operatorname{sen} \Phi \cos K \right) + y \left(\operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} K \right) + z \cos \Phi \right] = r_{13} \\ &\frac{\partial Fx}{\partial K} = \lambda \left[-x \left(\cos \Phi \operatorname{sen} K \right) - y \left(\cos \Phi \cos K \right) \right] = \lambda \left[x \ a_{12} - y \ a_{11} \right] = r_{14} \\ &\frac{\partial Fx}{\partial T_x} = 1 = r_{15} \qquad \frac{\partial Fx}{\partial T_y} = 0 = r_{16} \qquad \frac{\partial Fx}{\partial T_z} = 0 = r_{17} \qquad \frac{\partial Fx}{\partial X} = -1 \end{split}$$

$$\begin{split} \frac{\partial Fy}{\partial \lambda} &= x \, a_{21} + y \, a_{22} + z \, a_{23} = r_{21} \\ \frac{\partial Fy}{\partial \Omega} &= \lambda \left[x \left(- \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} K + \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi \cos K \right) + y \left(- \operatorname{sen} \Omega \cos K - \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} K \right) + \\ &+ z \left(- \cos \Omega \cos \Phi \right) \right] = -\lambda \left(x \, a_{31} + y \, a_{32} + z \, a_{33} \right) = r_{22} \\ \frac{\partial Fy}{\partial \Phi} &= \lambda \left[x \left(\operatorname{sen} \Omega \cos \Phi \cos K \right) + y \left(- \operatorname{sen} \Omega \cos \Phi \operatorname{sen} K \right) + z \left(\operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} \Phi \right) \right] = r_{23} \\ \frac{\partial Fy}{\partial \Phi} &= \lambda \left[x \left(\cos \Omega \cos K - \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} K \right) + y \left(- \cos \Omega \operatorname{sen} K - \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} \Phi \cos K \right) \right] = \\ \lambda \left[x \, a_{22} - y \, a_{21} \right] = r_{24} \\ \frac{\partial Fy}{\partial T_X} &= 0 = r_{25} \qquad \frac{\partial Fy}{\partial T_Y} = 1 = r_{26} \qquad \frac{\partial Fy}{\partial T_Z} = 0 = r_{27} \qquad \frac{\partial Fy}{\partial Y} = -1 \end{split}$$

$$\begin{split} &\frac{\partial Fz}{\partial \lambda} = x \ a_{31} + y \ a_{32} + z \ a_{33} = r_{31} \\ &\frac{\partial Fz}{\partial \Omega} = \lambda \left[x \left(\cos \Omega \operatorname{sen} K + \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} \Phi \cos K \right) + y \left(\cos \Omega \cos K - \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} K \right) + \\ &+ z \left(- \operatorname{sen} \Omega \cos \Phi \right) \right] = \lambda \left(x \ a_{21} + y \ a_{22} + z \ a_{23} \right) = r_{32} \\ &\frac{\partial Fz}{\partial \Phi} = \lambda \left[x \left(- \cos \Omega \cos \Phi \cos K \right) + y \left(\cos \Omega \cos \Phi \operatorname{sen} K \right) + z \left(- \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi \right) \right] = r_{33} \\ &\frac{\partial Fz}{\partial K} = \lambda \left[x \left(\operatorname{sen} \Omega \cos K + \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} K \right) + y \left(- \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} K + \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi \cos K \right) \right] \\ &= \lambda \left[x \ a_{32} - y \ a_{31} \right] = r_{34} \\ &\frac{\partial Fz}{\partial T_{X}} = 0 = r_{35} \qquad \qquad \frac{\partial Fz}{\partial T_{Y}} = 0 = r_{36} \qquad \qquad \frac{\partial Fz}{\partial T_{Z}} = 1 = r_{37} \qquad \qquad \frac{\partial Fz}{\partial Z} = -1 \end{split}$$

Siendo respectivamente:

- $(Fx)_{0}$, $(Fy)_{0}$, $(Fz)_{0}$ son los valores de las funciones (Fx, Fy y Fz), en las cuales se han sustituido el valor de la primera aproximación.
- $(F_X)_0 = (X)_0 X_a$ $(F_Y)_0 = (Y)_0 Y_a$ $(F_Z)_0 = (Z)_0 Z_a$
- $\left(\frac{\partial Fx}{\partial X}\right)_0, \left(\frac{\partial Fx}{\partial \lambda}\right)_0, \left(\frac{\partial Fx}{\partial \Omega}\right)_0, \dots, \left(\frac{\partial Fz}{\partial Z}\right)_0$ son las derivadas parciales de la función con respecto a los parámetros desconocidos, evaluados a la primera aproximación.
- $d\lambda$, $d\Omega$, $d\Phi$, dK, dT_X , dT_Y , dT_Z , dX, dY, dZ, son las correcciones a efectuar a las aproximaciones iniciales, las cuales serán obtenidas en el proceso de cálculo.

2. Derivadas parciales de la transformación tridimensional utilizando la matriz de rotación aproximada.

Partiendo de las ecuaciones de la transformación linealizadas y considerando que los ángulos de rotación son pequeños ($\Omega \approx 0$; $\Phi \approx 0$; $K \approx 0$), pueden estas expresarse de la forma:

 $Fx = (X)_{0} + xd\lambda + \lambda zd\Phi - \lambda ydK + dT_{x} - X$ $Fx = (Y)_{0} + yd\lambda - \lambda zd\Omega + \lambda xdK + dT_{y} - Y$ $Fz = (Z)_{0} + zd\lambda + \lambda yd\Omega - \lambda xd\Phi + dT_{z} - Z$

donde se ha sustituido cada uno de los coeficientes r_{11} , r_{12} ,.... r_{37} por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Fx}{\partial \lambda} &= x a_{11} + y a_{12} + z a_{13} = x \\ \frac{\partial Fx}{\partial \Omega} &= 0 \\ \frac{\partial Fx}{\partial \Phi} &= \lambda \left[-x \left(\operatorname{sen} \Phi \cos K \right) + y \left(\operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} K \right) + z \cos \Phi \right] = \lambda z \\ \frac{\partial Fx}{\partial K} &= \lambda \left[-x \left(\cos \Phi \operatorname{sen} K \right) - y \left(\cos \Phi \cos K \right) \right] = \lambda \left[x a_{12} - y a_{11} \right] = -\lambda y \end{aligned}$$

$$\begin{split} \frac{\partial Fx}{\partial T_x} &= 1 = r_{15} \qquad \frac{\partial Fx}{\partial T_y} = 0 = r_{16} \qquad \frac{\partial Fx}{\partial T_z} = 0 = r_{17} \qquad \frac{\partial Fx}{\partial X} = -1 \\ \frac{\partial Fy}{\partial \lambda} &= x \, a_{21} + y \, a_{22} + z \, a_{23} = y \\ \frac{\partial Fy}{\partial \Omega} &= \lambda \left[x \left(- \sec \Omega \operatorname{sen} K + \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi \cos K \right) + y \left(- \sec \Omega \cos K - \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi \sin K \right) + z \left(-\cos \Omega \cos \Phi \right) \right] = -\lambda \left(x \, a_{31} + y \, a_{32} + z \, a_{33} \right) = -\lambda z \\ \frac{\partial Fy}{\partial \Phi} &= \lambda \left[x \left(\operatorname{sen} \Omega \cos \Phi \cos K \right) + y \left(- \operatorname{sen} \Omega \cos \Phi \sin K \right) + z \left(\operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} \Phi \cos K \right) \right] = 0 \\ \frac{\partial Fy}{\partial K} &= \lambda \left[x \left(\cos \Omega \cos K - \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} \Phi \sin K \right) + y \left(- \cos \Omega \operatorname{sen} K - \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} \Phi \cos K \right) \right] \right] = \lambda x \\ \frac{\partial Fy}{\partial T_x} &= 0 = r_{25} \qquad \frac{\partial Fy}{\partial T_y} = 1 = r_{26} \qquad \frac{\partial Fy}{\partial T_z} = 0 = r_{27} \qquad \frac{\partial Fy}{\partial Y} = -1 \\ \frac{\partial Fz}{\partial \lambda} &= x \, a_{31} + y \, a_{32} + z \, a_{33} = z \\ \frac{\partial Fz}{\partial \lambda} &= \lambda \left[x \left(\cos \Omega \operatorname{sen} K + \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} \Phi \cos K \right) + y \left(\cos \Omega \cos K - \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} \Phi \sin K \right) + z \left(- \operatorname{sen} \Omega \cos \Phi \right) \right] = \lambda \left(x \, a_{21} + y \, a_{22} + z \, a_{23} \right) = \lambda y \\ \frac{\partial Fz}{\partial \Phi} &= \lambda \left[x \left(- \cos \Omega \cos \Phi \cos K \right) + y \left(\cos \Omega \cos \Phi \sin K \right) + z \left(- \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi \cos K \right) \right] = -\lambda x \\ \frac{\partial Fz}{\partial \Phi} &= \lambda \left[x \left(\operatorname{sen} \Omega \cos \Phi \cos K \right) + y \left(\cos \Omega \cos \Phi \sin K \right) + z \left(- \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi \cos K \right) \right] = -\lambda x \\ \frac{\partial Fz}{\partial F} &= \lambda \left[x \left(\operatorname{sen} \Omega \cos K + \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} K \right) + y \left(- \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} K + \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi \cos K \right) \right] = -\lambda x \\ \frac{\partial Fz}{\partial F} &= \lambda \left[x \left(\operatorname{sen} \Omega \cos K + \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} K \right) + y \left(- \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} K + \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi \operatorname{cos} K \right) \right] = -\lambda x \\ \frac{\partial Fz}{\partial F} &= \lambda \left[x \left(\operatorname{sen} \Omega \cos K + \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} K \right) + y \left(- \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} K + \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi \operatorname{cos} K \right) \right] = \lambda \left[x \left(\operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} K + \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} K \right) + y \left(- \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} K + \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi \operatorname{cos} K \right) \right] = \lambda \left[x \left(\operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} K + \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi \operatorname{cos} K \right] = \lambda \left[x \left(\operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} K + \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} K \right) + y \left(- \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} K + \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi \operatorname{cos} K \right) \right] = \lambda \left[x \left(\operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} K + \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} K \right) = \lambda \left[x \left(\operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} K + \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} K \right) + y \left(\operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} K + \cos \Omega \operatorname{sen} \Phi \operatorname{cos} K \right) \right] = \lambda \left[x \left(\operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} K \right) = 0 \right]$$

Sustituyendo el valor de los giros en la matriz de rotación:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \mathbf{a}_{23} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\Omega = 0, \ \Phi = 0, \ K = 0)$$

Resultando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} x & 0 & z & -y & 1 & 0 & 0 \\ y & -z & 0 & x & 0 & 1 & 0 \\ z & y & -x & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\lambda \\ d\Phi \\ dK \\ dT_x \\ dT_y \\ dT_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(Fx)_0 \\ -(Fy)_0 \\ -(Fz)_0 \end{bmatrix}$$

Ha de tenerse en cuenta que en el sistema de ecuaciones anterior, se asume que las correcciones de los ángulos están multiplicados por el factor de escala, es decir, $d\Omega = \lambda d\Omega$; $d\Phi = \lambda d\Phi$; $dK = \lambda dK$.

3. Coeficientes de la función Fx, Fy (Ecuaciones de colinealidad)

Partiendo de las ecuaciones de colinealidad:

$$Fx = qx' + cr = 0$$
 $Fy = qy' + cs = 0$

Linealizando dichas ecuaciones por medio del desarrollo en serie de Taylor hasta el primer término, tendremos:

$$0 = (Fx)_{0} + \left(\frac{\partial Fx}{\partial X}\right)_{0} dX + \left(\frac{\partial Fx}{\partial Y}\right)_{0} dY + \left(\frac{\partial Fx}{\partial Z}\right)_{0} dZ + \left(\frac{\partial Fx}{\partial X_{o}}\right)_{0} dX_{0} + \left(\frac{\partial Fx}{\partial Y_{o}}\right)_{0} dY_{0} + \left(\frac{\partial Fx}{\partial Z_{o}}\right)_{0} dZ_{0} + \left(\frac{\partial Fx}{\partial \omega}\right)_{0} d\omega + \left(\frac{\partial Fx}{\partial \varphi}\right)_{0} d\varphi + \left(\frac{\partial Fx}{\partial \kappa}\right)_{0} d\kappa$$
$$0 = (Fy)_{0} + \left(\frac{\partial Fy}{\partial X}\right)_{0} dX + \left(\frac{\partial Fy}{\partial Y}\right)_{0} dY + \left(\frac{\partial Fy}{\partial Z}\right)_{0} dZ + \left(\frac{\partial Fy}{\partial X_{o}}\right)_{0} dX_{0} + \left(\frac{\partial Fy}{\partial Y_{o}}\right)_{0} dY_{0} + \left(\frac{\partial Fy}{\partial Z_{o}}\right)_{0} dZ_{0} + \left(\frac{\partial Fy}{\partial Z_{o}}\right)_{0} d\omega + \left(\frac{\partial Fy}{\partial \varphi}\right)_{0} d\varphi + \left(\frac{\partial Fy}{\partial \kappa}\right)_{0} d\kappa$$

Coeficientes de la función lineal aproximada Fy :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Fx}{\partial X} &= \frac{1}{q} \left(x'm_{31} + cm_{11} \right) = A_{11} \\ \frac{\partial Fx}{\partial Y} &= \frac{1}{q} \left(x'm_{32} + cm_{12} \right) = A_{12} \\ \frac{\partial Fx}{\partial Z} &= \frac{1}{q} \left(x'm_{33} + cm_{13} \right) = A_{13} \\ \frac{\partial Fx}{\partial X_o} &= -\frac{1}{q} \left(x'm_{31} + cm_{11} \right) = -A_{11} \\ \frac{\partial Fx}{\partial Y_o} &= -\frac{1}{q} \left(x'm_{32} + cm_{12} \right) = -A_{12} \\ \frac{\partial Fx}{\partial Z_o} &= -\frac{1}{q} \left(x'm_{33} + cm_{13} \right) = -A_{13} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial \omega} = \frac{x'}{q} [(Y - Y_{o})(-\cos\omega\cos\varphi) + (Z - Z_{o})(-\sin\omega\cos\varphi)] + \frac{c}{q} [(Y - Y_{o})(-\sin\omega\sin\kappa + \cos\omega\sin\varphi\cos\kappa) + (Z - Z_{o})(\cos\omega\sin\kappa + \sin\omega\sin\varphi\cos\kappa)] = \frac{x'}{q} [(Y - Y_{o})m_{33} + (Z - Z_{o})m_{32}] + \frac{c}{q} [(Y - Y_{o})m_{13} + (Z - Z_{o})m_{12}] = \frac{x'}{q} [-\Delta Ym_{33} + \Delta Zm_{32}] + \frac{c}{q} [-\Delta Ym_{13} + \Delta Zm_{12}] = A_{14}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial \varphi} = \frac{x'}{q} [(X - X_{o})\cos\varphi + (Y - Y_{o})(\sin\omega\sin\varphi) + (Z - Z_{o})(-\cos\omega\sin\varphi)] + \frac{c}{q} [(X - X_{o})(-\sin\varphi\cos\kappa) + (Y - Y_{o})(\sin\omega\sin\varphi) + (Z - Z_{o})(-\cos\omega\sin\varphi)] + \frac{c}{q} [(X - X_{o})(-\sin\varphi\cos\varphi) + (Y - Y_{o})(\sin\omega\cos\varphi\cos\varphi) + (Z - Z_{o})(-\cos\omega\cos\varphi\cos\varphi)] = \frac{x'}{q} [\Delta X\cos\varphi + \Delta Y(\sin\omega\sin\varphi) + (Z - Z_{o})(-\cos\omega\cos\varphi\cos\varphi) + (\Delta Z(-\cos\omega\cos\varphi\cos\varphi))] = A_{15}$$

 $\frac{\partial Fx}{\partial \kappa} = \frac{c}{q} \left[(X - X_{o}) (-\cos \phi sen \kappa) + (Y - Y_{o}) (\cos \omega \cos \kappa - sen \omega sen \phi sen \kappa) + (Z - Z_{o}) (sen \omega \cos \kappa + \cos \omega sen \phi sen \kappa) \right] = \frac{c}{2} \left[(X - X_{o}) (-\cos \phi sen \kappa) + (Y - Y_{o}) (\cos \omega \cos \kappa - sen \omega sen \phi sen \kappa) + (Z - Z_{o}) (sen \omega \cos \kappa + \cos \omega sen \phi sen \kappa) \right] = \frac{c}{2} \left[(X - X_{o}) (-\cos \phi sen \kappa) + (Y - Y_{o}) (\cos \omega \cos \kappa - sen \omega sen \phi sen \kappa) + (Z - Z_{o}) (sen \omega \cos \kappa + \cos \omega sen \phi sen \kappa) \right] = \frac{c}{2} \left[(X - X_{o}) (-\cos \phi sen \kappa) + (Y - Y_{o}) (\cos \omega \cos \kappa - sen \omega sen \phi sen \kappa) \right] = \frac{c}{2} \left[(X - X_{o}) (-\cos \phi sen \kappa) + (Y - Y_{o}) (\cos \omega \cos \kappa - sen \omega sen \phi sen \kappa) \right]$

$$= \frac{c}{q} \left[\Delta X m_{21} + \Delta Y m_{22} + \Delta Z m_{23} \right] = A_{16}$$

La función *Fx* puede expresarse una vez linealizada en función de coeficientes quedando está de la forma:

$$0 = A_{11}dX + A_{12}dY + A_{13}dZ - A_{11}dX_{0} - A_{12}dY_{0} - A_{13}dZ_{0} + A_{14}d\omega + A_{15}d\phi + A_{16}d\kappa + (Fx)_{0}d\omega + A_{16}d\kappa + (Fx)_{0}d\omega + A_{16}d\omega +$$

Coeficientes de la función lineal aproximada Fy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F y}{\partial X} &= \frac{1}{q} (y'm_{31} + cm_{21}) = A_{21} \\ \frac{\partial F y}{\partial Y} &= \frac{1}{q} (y'm_{32} + cm_{22}) = A_{22} \\ \frac{\partial F y}{\partial Z} &= \frac{1}{q} (y'm_{33} + cm_{23}) = A_{23} \\ \frac{\partial F y}{\partial X_o} &= -\frac{1}{q} (y'm_{31} + cm_{21}) = -A_{21} \\ \frac{\partial F y}{\partial Y_o} &= -\frac{1}{q} (y'm_{32} + cm_{22}) = -A_{22} \\ \frac{\partial F y}{\partial Z_o} &= -\frac{1}{q} (y'm_{33} + cm_{23}) = -A_{23} \\ \frac{\partial F y}{\partial Z_o} &= -\frac{1}{q} (y'm_{33} + cm_{23}) = -A_{23} \\ \frac{\partial F y}{\partial \omega} &= \frac{y'}{q} [(Y - Y_o)(-\cos\omega\cos\phi) + (Z - Z_o)(-\sin\omega\cos\phi)] + \frac{c}{q} [(Y - Y_o)(-\sin\omega\cos\kappa - \cos\omega\sin\phi\sin\kappa) + \\ &+ (Z - Z_o)(\cos\omega\cos\kappa - \sin\omega\sin\phi\sin\kappa)] = \frac{y'}{q} [(Y - Y_o) - m_{33} + (Z - Z_o)m_{32}] + \frac{c}{q} [(Y - Y_o) - m_{23} + \\ &+ (Z - Z_o)m_{22}] = \frac{y'}{q} [-\Delta Y m_{33} + \Delta Z m_{32}] + \frac{c}{q} [-\Delta Y m_{23} + \Delta Z m_{22}] = A_{24} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Fy}{\partial K} = \frac{c}{q} \left[(X - X_{o})(-\cos\phi\cos\kappa) + (Y - Y_{o})(-\cos\omega\sin\kappa - \sin\omega\sin\phi\cos\kappa) + (Z - Z_{o})(-\sin\omega\sin\kappa + \cos\omega\sin\phi\cos\kappa) \right] = \frac{c}{q} \left[(X - X_{o})(-\cos\phi\cos\kappa) + (Y - Y_{o})(-\cos\omega\sin\kappa - \sin\omega\sin\phi\cos\kappa) + (Z - Z_{o})(-\sin\omega\sin\kappa - \sin\omega\sin\phi\cos\kappa) \right] = \frac{c}{q} \left[(X - X_{o})(-\cos\phi\cos\kappa) + (Y - Y_{o})(-\cos\omega\sin\kappa - \sin\omega\sin\phi\cos\kappa) + (Z - Z_{o})(-\sin\omega\sin\kappa - \sin\omega\sin\phi\cos\kappa) \right] = \frac{c}{q} \left[(X - X_{o})(-\cos\phi\cos\kappa) + (Y - Y_{o})(-\cos\omega\sin\kappa - \sin\omega\sin\phi\cos\kappa) + (Z - Z_{o})(-\sin\omega\sin\kappa - \sin\omega\sin\phi\cos\kappa) \right] = \frac{c}{q} \left[(X - X_{o})(-\cos\phi\cos\kappa) + (X - Y_{o})(-\cos\omega\sin\kappa - \sin\omega\sin\phi\cos\kappa) + (Z - Z_{o})(-\sin\omega\sin\kappa - \sin\omega\sin\phi\cos\kappa) \right] = \frac{c}{q} \left[(X - X_{o})(-\cos\phi\cos\kappa) + (X - Y_{o})(-\cos\omega\sin\kappa - \sin\omega\sin\phi\cos\kappa) + (X - Z_{o})(-\sin\omega\sin\kappa - \sin\omega\sin\phi\cos\kappa) \right] \right]$$

$$= -\frac{c}{q} [\Delta Xm_{11} + \Delta Ym_{12} + \Delta Zm_{13}] = A_{26}$$

$$\frac{\partial Fy}{\partial \phi} = \frac{y'}{q} [(X - X_o)\cos\phi + (Y - Y_o)(\operatorname{senwsen}\phi) + (Z - Z_o)(-\cos\omega\operatorname{sen}\phi)] + \frac{c}{q} [(X - X_o)(\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\kappa) + (Y - Y_o)(-\operatorname{sen}\omega\cos\phi\operatorname{sen}\kappa) + (Z - Z_o)(\cos\omega\cos\phi\operatorname{sen}\kappa)] = \frac{y'}{q} [\Delta X\cos\phi + \Delta Y(\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}\phi) + \Delta Z(-\cos\omega\operatorname{sen}\phi)] + \frac{c}{q} [\Delta X(\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\kappa) + \Delta Y(-\operatorname{sen}\omega\cos\phi\operatorname{sen}\kappa) + \Delta Z(\cos\omega\cos\phi\operatorname{sen}\kappa)] = A_{25}$$

Al igual que antes, la ecuación *Fy* puede expresarse en función de coeficientes:

$$0 = A_{21}dX + A_{22}dY + A_{23}dZ - A_{21}dX_{o} - A_{22}dY_{o} - A_{23}dZ_{o} + A_{24}d\omega + A_{25}d\phi + A_{26}d\kappa + (Fy)_{o}$$

4. Estrategia de cálculo para aerotriangulación.

Hay métodos valederos para la reducción de las matrices de rotación y para obtener una solución de grandes bloques de fotografías. El primer paso es la separación de las ecuaciones normales, por tanto los términos de la orientación externa y los términos del sistema del espacio objeto serán separados, obteniendo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{12}^{\mathrm{T}} & \mathbf{N}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1} \\ \mathbf{x}_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{1} \\ \mathbf{n}_{2} \end{bmatrix}$$

En esta ecuación, N₁₁ es la submatriz del bloque diagonal de la porción superior izquierda de la matriz N ($6m \times 6m$), donde *m* es el número de fotos del bloque; N₂₂ es la submatriz del bloque diagonal de la porción inferior derecha de N que será del tipo ($3n \times 3n$), siendo *n* el número de puntos objetos del bloque; N₁₂ es la submatriz de la parte superior derecha de N ($6m \times 1$) que contiene los términos de corrección de los parámetros de orientación externa para todas las fotos; x₂ es la submatriz de la parte inferior de X ($3n \times 1$) que contiene los términos de corrección de los puntos; n₁ es la submatriz de la parte superior de L ($6m \times 1$); y n₂ es la submatriz de la parte inferior de L ($3n \times 1$).

Estas son matrices diagonales en las cuales casi todos los elementos son 0 excepto los de la diagonal principal. Este tipo de matrices tiene la propiedad de que su inversa también es una matriz diagonal, donde las submatrices son inversas de las correspondientes submatrices de la matriz original. Por tanto, es más fácil calcular la inversa de una matriz diagonal que la inversa de una general (sin valores 0). La ecuación anterior podemos transformarla para una solución más eficiente. Primero la separaremos en dos ecuaciones:

$$N_{11}X_{1} + N_{12}X_{2} = n_{1}$$
$$N_{12}^{T}X_{1} + N_{22}X_{2} = n_{2}$$

Despejando de la segunda ecuación x_2 y sustituyendo en la primera) tendremos el valor de x_1 :

$$\mathbf{x}_{2} = \mathbf{N}_{22}^{-1} \left(\mathbf{n}_{2} - \mathbf{N}_{12}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}_{1} \right)$$

$$N_{11}X_{1} + N_{12}N_{22}^{-1}(n_{2} - N_{12}^{T}X_{1}) = n_{1}$$
$$N_{11}X_{1} + N_{12}N_{22}^{-1}n_{2} - N_{12}N_{22}^{-1}N_{12}^{T}X_{1} = n_{1}$$
$$X_{1} = (N_{11} - N_{12}N_{22}^{-1}N_{12}^{T})^{-1}(n_{1} - N_{12}N_{22}^{-1}n_{2})$$

denominado sistema de ecuaciones normales reducidas, pudiendo expresarse de la forma:

 $x_1 = S^{-1} E$

Este método es más eficiente que los grandes sistemas de ecuaciones que deben ser resueltos, teniendo 6m incógnitas en lugar de 6m+3n incógnitas que tienen las ecuaciones normales enteras.

Los métodos de almacenamiento de datos y las técnicas especiales de cálculo reducen el tiempo de cálculo y los medios de almacenamiento.

En un proyecto fotogramétrico normal de aerotriangulación, cada fotografía se solapa solamente con unas pocas fotografías del bloque. Resulta entonces que muchas submatrices S_{ik} son nulas. Numerando convenientemente las fotografías, puede además conseguirse que las submatrices no nulas estén situadas en una banda alrededor de la banda principal de *S*. Existen algoritmos especialmente diseñados para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales donde la matriz de los coeficientes tiene una estructura banda.

Para comprender mejor esto, se presentan dos ejemplos extraídos del libro "*Element of Photogrammetry*" de Paul R. Wolf (pp 398-400). En la figura B.1 se muestra un pequeño bloque con 3 pasadas de 9 fotos cada una, teniendo unos recubrimientos longitudinales y transversales de 60% y 30% respectivamente.



Figura B.1. Configuración de un bloque de fotografías con 3 pasadas de 9 puntos cada una.

La imagen de un punto de paso representativo de paso A aparece en las fotos 1-1, 1-2, 1-3, 2-1, 2-2, y 2-3. Este punto de paso sirve de conexión entre cada posible par de fotos del conjunto de las seis en las que está ubicado. Las conexiones para el bloque entero se muestran en la figura B.2. Esta figura muestra un gráfico que indica las conexiones (como líneas o arcos) realizadas por puntos de paso sobre el bloque entero:



FiguraB. 2. Gráfico de las conexiones entre fotos por puntos de paso compartidos.

Posición	Orden longitudinal	Orden transversal	Posición	Orden longitudinal	Orden transversal
1	1-1	1-1	15	2-6	3-5
2	1-2	2-1	16	2-7	1-6
3	1-3	3-1	17	2-8	2-6
4	1-4	1-2	18	2-9	3-6
5	1-5	2-2	19	3-1	1-7
6	1-6	3-2	20	3-2	2-7
7	1-7	1-3	21	3-3	3-7
8	1-8	2-3	22	3-4	1-8
9	1-9	3-3	23	3-5	2-8
10	2-1	1-4	24	3-6	3-8
11	2-2	2-4	25	3-7	1-9
12	2-3	3-4	26	3-8	2-9
13	2-4	1-5	27	3-9	3-9
14	2-5	2-5			

Tabla B.1. Ordenación de las fotos de la figura 1.

Estas conexiones dan lugar a submatrices distintas de 0 que corresponden a ecuaciones normales reducidas. Las posiciones donde aparezcan esas submatrices dependen del orden en que estén los parámetros de la foto en la matriz de ecuaciones normales reducidas. En el orden longitudinal, los parámetros de la foto se disponen por pasadas, por tanto las nueve fotos de la pasada una aparecen antes, seguidas de las nueve fotos de la segunda pasada y las nueve fotos de la tercera.

FOTOGRAMETRÍA III

En el orden transversal, los parámetros de las fotos se disponen de modo que la primera foto de la pasada 1 aparece antes, seguida de la primera foto de la pasada 2 y luego la primera foto de la tercera, luego la foto 2 de la primera, la foto 2 de la segunda....etc. Estas dos formas de ordenación se muestran en la tabla B.1. Como será demostrado la ordenación longitudinal dará una solución más eficiente que la ordenación transversal para este caso.

La figura B.3 muestra una representación esquemática de las ecuaciones normales reducidas para el caso de ordenación longitudinal. En la figura se puede observar que los elementos distintos de cero tienden a agruparse en una banda sobre la diagonal principal de la matriz. La anchura de la banda desde la diagonal al elemento más alejado distinto de 0 se denomina anchura de banda de la matriz. La anchura de banda de la matriz mostrada en la figura B.3 es $6 \times 12=72$. Mediante el método de ordenación transversal de las fotos, la matriz de ecuaciones normales reducidas aparece representada en la figura B.4, donde la anchura de banda de la matriz es $6 \times 8=48$, más pequeño que en el método anterior.



Figura B.3. Estructura de las ecuaciones normales reducidas usando la ordenación longitudinal



Figura B.4. Estructura de las ecuaciones normales reducidas usando la ordenación transversal.

5. Precisión en aerotriangulación

En las siguientes tablaS se muestran las ecuaciones de precisión teórica para recubrimiento longitudinal del 60 % y transversales del 20% y 60 % respectivamente.



Figura B.5. Modelo de bloque de puntos de control planimétrico para las ecuaciones de la tabla 1.

5.1. Modelos independientes

Planimetría:

Recubrimiento longitudinal del 60 % y transversal del 20 %.	Recubrimiento longitudinal del 60 % y transversal del 60 %.
$P1: \mu_{XY} \approx (0.70 + 0.29 \log n_p) \sigma_o$	$P1: \mu_{XY} \approx (0.50 + 0.21 \log n_p) \sigma_o$
P1: $\mu_{XY} \approx (0.83 + 0.02 n_p) \sigma_o$	no se estimó
P1: $\mu_{XY} \approx (0.83 + 0.05 n_p) \sigma_o$	P1: $\mu_{XY} \approx (0.58 + 0.03 n_p) \sigma_o$
P1: $\mu_{XY} \approx (0.47 + 0.25 n_p) \sigma_o$	P1: $\mu_{XY} \approx (0.34 + 0.15 n_p) \sigma_o$

Tabla B.2. Ecuaciones de precisión teórica planimétrica para modelos independientes.

Altimetría:

Recubrimiento longitudinal d	lel 60	%	у	Recubrimiento	longitudinal	del	60	%	у
transversal del 20 %.				transversal del 60) %.				
$\mu_Z \approx (0.34 + 0.2)$	2 i) σ₀				$\mu_Z \approx 0.25$	i σ₀			

5.2. Modelos independientes

Planimetría:

Recubrimiento longitudinal del 60 % y transversal del 20 %.	Recubrimiento longitudinal del 60 % y transversal del 60 %.
P1: $\mu_{XY} \approx 0.9 \sigma_{o}$	P1: $\mu_{XY} \approx 0.6 \sigma_{o}$
P1: $\mu_{XY} \approx (0.5 + 0.025 n_p) \sigma_o$	P1: $\mu_{XY} \approx (0.4 + 0.015 n_p) \sigma_o$
P1: $\mu_{XY} \approx (0.3 + 0.08 n_p) \sigma_o$	P1: $\mu_{XY} \approx (0.3 + 0.04 n_p) \sigma_o$
P1: $\mu_{xy} \approx 0.27 \sigma_{o}$	$P1: \mu_{XY} \approx 0.14 \sigma_{o}$

Tabla B.3. Ecuaciones de precisión teórica planimétrica para modelos independientes.

Altimetría:

Recubrimiento longitudinal del 60 transversal del 20 %.	%	у	Recubrimiento longitudinal del 60 % transversal del 60 %.	у
$\mu_Z \approx (1.00 + 0.18 \text{ i}) \sigma_o$			$\mu_Z \approx 0.3 \text{ i } \sigma_o$	